

SECTION B et D (Cours : B. Gentou)

Examen de seconde session du 14 juin 2011

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculatrice, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.

Déterminer tous les nombres complexes z tels que

$$z^5 = 16 - 16i\sqrt{3}$$

Exercice 2.

On considère les fonctions polynômes suivantes :

$$P(x) = x^5 + (1 - 2i)x^4 + (3 - 6i)x^3 + (3 - 6i)x^2 + (2 - 6i)x + 2 - 4i$$

$$Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

1. Factoriser $Q(x)$ en un produit de polynômes de degré 1.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.
3. Factoriser $P(x)$ en un produit de polynômes de degré 1.

Exercice 3.

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs $u_1 = (1, 3, 2, -1)$, $u_2 = (2, -1, 1, -1)$, $u_3 = (1, -1, 1, 1)$ et $u_4 = (0, 1, 1, 1)$ et on note F le sous-espace vectoriel engendré par ces 4 vecteurs.

1. Déterminer une équation de F .
 (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle une famille génératrice de \mathbb{R}^4 ?
2. Peut-on en déduire si (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre ou liée ? Justifier.
3. Déterminer la dimension de F .
4. Soit m un réel, on considère le système \mathcal{S}_m suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = m^2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = -m \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = m \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \end{cases}$$

D'après la question 1, pour quelles valeurs de m ce système admet-il au moins une solution ?

5. On suppose $m = 1$. Définir géométriquement l'ensemble des solutions du système \mathcal{S}_1 .

Exercice 4.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur \mathbb{R} , donner la définition exacte (à l'aide d'un réel $\varepsilon > 0$) de la formule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
2. Étudier la dérivabilité sur \mathbb{R} de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \ln(x^2) \end{cases} \text{ pour tout réel } x \neq 0.$$

Exercice 5. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 2x + \frac{\pi}{4} - \arctan x.$$

Rappel : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
3. Montrer que l'application f^{-1} est dérivable sur I .
4. Calculer les valeurs $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $(f^{-1})'(2)$ de la dérivée de f^{-1} en $\frac{\pi}{4}$ et en 2.

Exercice 6.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On note $I = [1, 2]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I .
2. Montrer avec soin que si la suite (u_n) converge alors sa limite l appartient à I et vérifie $f(l) = l$.
3. En déduire que si la suite (u_n) converge alors sa limite est $\sqrt{2}$.
4. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{2}|$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
7. Que peut-on en conclure pour la suite (u_n) ?
8. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de $\sqrt{2}$ par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-2} ?
9. *Question hors barème :*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$, et en déduire que : $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq |u_n - \sqrt{2}|^2$.

Puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n}}$.

Comparer cette majoration d'erreur à celle trouvée à la question 6.