Chapitre 24a

Espaces vectoriels

Compétences attendues.

- ✓ Montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ✓ Écrire un sous-espace F sous forme d'un espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- ✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou génératrice
- ✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel.
- ✓ Montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais tous les résultats énoncés restent valables pour un corps quelconque.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les *scalaires*.

1.1 Généralités

Définition.

Soit E un ensemble non vide muni de deux opérations :

- une loi de composition interne, l'addition, notée $+$: $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$;
- une loi de composition externe, la multiplication par un scalaire, notée $\cdot$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,y) & \mapsto & \lambda \cdot y \end{array}$.

On dit que $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel*, ou *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ (en abrégé $\mathbb{K}$-e.v., ou e.v.), si :

(i) $(E,+)$ est un groupe abélien dont l'élément neutre est noté 0_E et est appelé *le vecteur nul* de E ;

(ii) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;

(iii) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;

(iv) $\cdot$ est distributive sur l'addition de $\mathbb{K}$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;

(v) $\forall x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

Les éléments de E sont alors appelés des *vecteurs*.

Propriété 1 (Règles de calcul dans un espace vectoriel)

(1) Pour tout $(\lambda,x) \in \mathbb{K} \times E$, $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$;

(2) Pour tout $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$. Autrement dit, $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x dans $(E,+)$.

Propriété 2 (Espace vectoriel produit)

Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ les opérations suivantes :

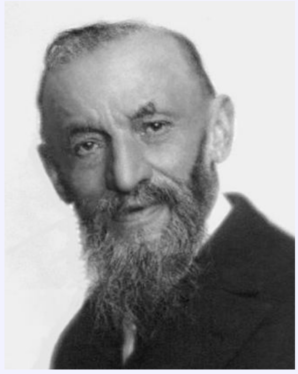
- l'addition : $(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$;
- la multiplication par un scalaire : $\lambda \cdot (x_1,\dots,x_n) = (\lambda \cdot x_1,\dots,\lambda \cdot x_n)$.

Muni de ces opérations, $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul 0_E est égal à $(0_{E_1},\dots,0_{E_n})$.

Le saviez-vous ?

La notion d'espace vectoriel a été introduite dans les années 1840 par Arthur Cayley (1821-1895) et Hermann Grassmann (1809-1877). La premier a considéré des n-uplets de réels et a défini dessus des opérations. Le second a fourni une théorie un peu confuse, incomprise de ses contemporains, mais qui avait l'avantage de ne pas dépendre d'une base.

Les espaces vectoriels ont été formalisés en 1888 par Giuseppe Peano (1858-1932) et sont devenus le cadre naturel de la géométrie, mais aussi de nombreux autres domaines. On peut concevoir des espaces vectoriels dont les éléments sont des fonctions, des polynômes ou des matrices. L'algèbre linéaire permet ainsi d'utiliser l'intuition géométrique dans des théories mathématiques dépourvues de support intuitif apparent.



Giuseppe Peano (1858-1932)

1.2 Espaces vectoriels de référence

Espace vectoriel $\mathbb{K}$

L'ensemble $\mathbb{K}$ muni de son addition et de sa multiplication (vue ici comme loi de composition externe) est un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel où le vecteur nul est $0_{\mathbb{K}} = 0$. En particulier, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On peut voir aussi $\mathbb{C}$ est comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on le munit de son addition et de la loi externe $\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x = \lambda \times x \end{array}$ où le produit se fait dans $\mathbb{C}$.

Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en tant que produit cartésien de l'espace vectoriel $\mathbb{K}$, avec pour lois :

- l'addition donnée pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ par :
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_3 + y_3);$$
- la multiplication par un scalaire donnée pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \cdot, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

En particulier, les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ des vecteurs du plan et de l'espace forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Espaces vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$, muni des lois usuelles d'addition matricielle et de multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de vecteur nul $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = 0_{n,p}$.

Espace vectoriel $\mathscr{F}(\Omega, E)$

Soient Ω un ensemble non vide et $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On définit sur $\mathscr{F}(\Omega, E)$ une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe $\cdot$ en posant :

$$\forall (f, g) \in \mathscr{F}(\Omega, E)^2,\ f + g : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \forall (\lambda, f) \in \mathbb{K} \times \mathscr{F}(\Omega, E),\ \lambda \cdot f \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array}.$$

Propriété 3

Le triplet $(\mathscr{F}(\Omega, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul $0_{\mathscr{F}(\Omega,E)}$ est l'application nulle $\omega \mapsto 0_E$ de Ω dans E.

Exemples.

- Pour tout intervalle I, l'ensemble $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un élément de $\mathbb{K}$, de vecteur nul $0_{\mathscr{F}(I,\mathbb{R})}$ la fonction nulle.
- L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des suites et leur multiplication par un élément de $\mathbb{K}$, de vecteur nul $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ la suite nulle.

Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni des lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de vecteur nul $0_{\mathbb{K}[X]}$ le polynôme nul.

1.3 Combinaisons linéaires

Définition.

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $x_1, \dots, x_p \in E$.
On dit que $x \in E$ est *combinaison linéaire des vecteurs* $x_1, \dots, x_p \in E$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_p \cdot x_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot x_i.$$

Exemples.

- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1, 2, 0)$ est combinaison linéaire de $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 0)$, mais pas de $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$.
- Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$.
- Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \mapsto \cos(x)^3$ est combinaison linéaire de $x \mapsto 1$, cos, $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto \cos(3x)$.

Cette définition se généralise pour un nombre quelconque de vecteurs de la manière suivante.

Définition.

- On dit qu'une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I est *presque nulle* si tous ses éléments, **sauf un nombre fini**, sont nuls.

  On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I.

- Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par I.

  On dit que $x \in E$ est *combinaison linéaire de* $(x_i)_{i \in I}$ s'il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i.$$

Mise en garde.
Nous pourrons maintenant parler des combinaisons linéaires d'un nombre INFINI de vecteurs, mais chacune de ces combinaisons linéaires reste fondamentalement une somme FINIE. De « vraies » sommes infinies (avec un nombre infini de termes non nuls) nécessitent de définir convenable leur convergence, ce qui n'est pas toujours possible.

Exemple. Dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire des éléments de $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Rappelons à ce sujet que la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ des polynômes, très pratique, désigne en fait une somme **finie**.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit F une partie de E.
On dit que F est un *sous-espace vectoriel de E* si :

(i) F est stable par $+$: $\forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F$;

(ii) F est stable par multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$;

(iii) muni des lois induites $+$ et $\cdot$, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple. Si E est un $\mathbb{K}$-e.v., alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E, appelés *sous-espaces vectoriels triviaux de E*.

Propriété 4 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E (en abrégé s.e.v. de E) si, et seulement si :

(i) $0_E \in F$; (ii) $\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot x + y \in F$.

Exemples.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- L'ensemble des matrices diagonales, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- Les ensembles $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.
- L'ensemble des solutions, sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$.

Remarques.

- Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est stable par combinaisons linéaires : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,
$$\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n \in F.$$
On le montre par récurrence immédiate en utilisant (ii).

- Vous trouverez parfois la condition $0_E \in F$ remplacée par $F \neq \emptyset$. C'est équivalent car si $0_E \in F$, alors $F \neq \emptyset$. Et réciproquement, si $F \neq \emptyset$, alors il existe $x \in F$, et $0_E = 0 \cdot x \in F$ par stabilité par multiplication par un scalaire.

- De même, il se peut que vous croisiez la stabilité par combinaison linéaire sous la forme suivante :

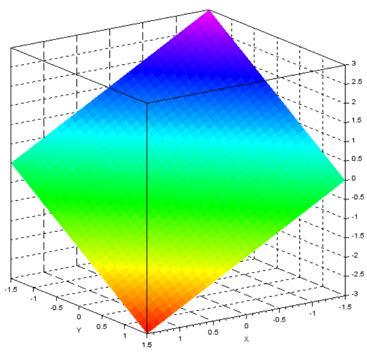
  (ii') $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$.

  C'est là aussi équivalent : (ii$'$) $\Rightarrow$ (ii) en prenant $\mu = 1$. Et réciproquement, si (ii) est satisfait, alors pour tout $(x, y) \in F^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\mu \cdot y + 0_E \in F$, et donc $\lambda \cdot x + (\mu \cdot y) \in F$. D'où (ii) $\Rightarrow$ (ii$'$).

Méthode. Comment montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel ?
Pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il suffit la plupart du temps de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exercice 1

1. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid 2P - XP' = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille 2×2 est un espace vectoriel.



Représentation du sous-espace F.

Propriété 5

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel E.
L'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition.

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel, et X une partie de E.
On appelle *sous-espace vectoriel engendré par X*, et on note $\mathrm{Vect}(X)$, l'intersection $\bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v. de } E \\ X \subset F}} F$ de tous les sous-espaces vectoriels contenants X.

Propriété 6

Soient $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel, et X une partie de E.

(1) $\mathrm{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel contenant X.

(2) Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant X, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset F$.

(3) Si $X \subset Y$, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(Y)$.

(4) X est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $X = \mathrm{Vect}(X)$.

Propriété 7

Soient $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel et $X = \{e_i,\ i \in I\}$ une partie non vide de E.
Le sous-espace $\mathrm{Vect}(X)$, aussi noté $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$, est égal à l'ensemble $\mathscr{C}$ des combinaisons linéaires des vecteurs de X.

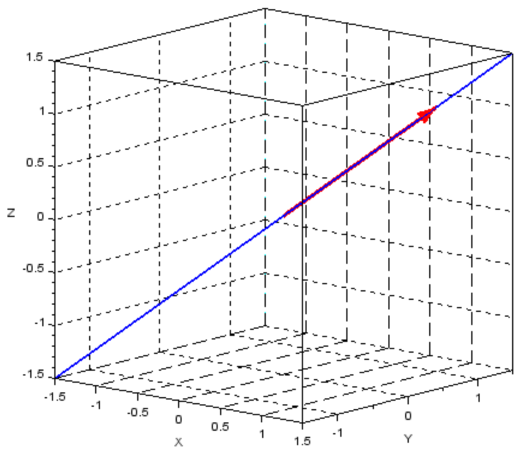
Remarques.

- Si $X = \{e_1, \dots, e_n\}$ est fini, on obtient donc :

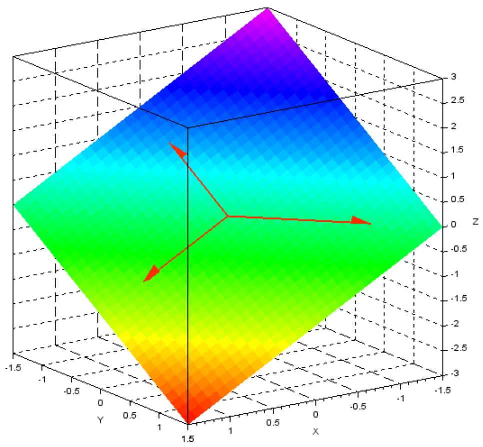
$$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n) = \{\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n \mid \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

  En particulier : $\quad x \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n) \iff \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$

- Pour $u \in E\backslash\{0_E\}$, $\mathrm{Vect}(u) = \{\alpha\cdot u,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ et est l'ensemble des vecteurs colinéaires à u. Autrement dit, il s'agit de la *droite vectorielle* (passant par 0_E) dirigée par le vecteur u.



Représentation de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}((1,1,1))$.



Représentation du sous-espace $\mathrm{Vect}((-1,1,0),(0,-1,1),(1,0,-1))$.

Exemples.

- $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$, et $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Vect}(i) = i\mathbb{R}$ et $\mathrm{Vect}(1,i) = \{a+ib,\ a,b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$. Dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathrm{Vect}(1) = \mathbb{C}$.

- Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

Propriété 8 (Opérations sur les Vect)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $e_1, \ldots, e_n \in E$.

- Pour tout $i \neq j$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}^*$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_j, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j, \ldots, e_i, \ldots, e_n),$$

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i + \lambda \cdot e_j, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n),$$
$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, \mu \cdot e_i, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n).$$

- e_n est une combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_{n-1}$ si, et seulement si :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1}).$$

Exemple. $\mathrm{Vect}((-1,1,0),(0,-1,1),(1,0,-1)) = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(0,-1,1))$ car $(1,0,-1) = -(-1,1,0) - (0,-1,1)$.

Exercice 2 Soient $f_1 : x \mapsto \cos(x)$, $f_2 : x \mapsto \sin(x+1)$, $f_3 : x \mapsto \sin(x-1)$. Simplifier $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Méthode. Comment écrire un sous-espace vectoriel sous forme paramétrique ?

Soit F un sous-espace vectoriel défini par (ou dont la définition se ramène à) un système d'équations linéaires. Pour écrire F sous forme d'un $\mathrm{Vect}(\ldots)$ *:*

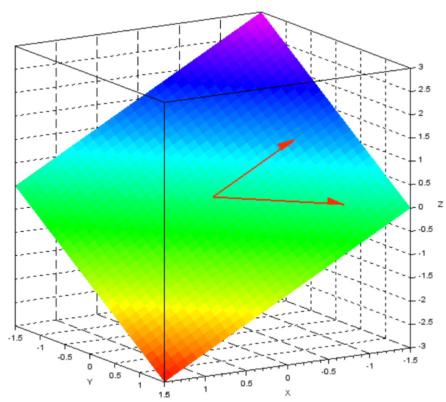
(i) on échelonne le système, et on identifie inconnues principales et inconnues paramètres ;

(ii) on substitue dans l'expression de F les inconnues principales par les inconnues paramètres. Les inconnues principales ne doivent plus apparaitre !

(iii) on factorise par les inconnues paramètres pour obtenir les vecteurs qui engendrent F.

Exercice 3 Écrire les ensembles suivants comme des sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs :

- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$;
- $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid 2P - XP' = 0\}$;
- $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.



F est le sous-espace engendré par $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$.

3 Familles de vecteurs

3.1 Familles libres

Définition.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une *famille libre*, ou que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont *linéairement indépendants*, si :

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0 \implies (\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0)\right).$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est *liée* ou que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont *linéairement dépendants*.

Propriété 9 (Unicité de l'écriture dans une famille libre)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i\right) \implies \left(\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i\right).$$

Remarques.

- Une famille composée d'un vecteur non nul est libre.
- Une famille contenant le vecteur nul est liée.
- Rappelons que deux vecteurs x et y sont *colinéaires* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$x = \lambda \cdot y \ \ \textbf{ou} \ \ y = \lambda \cdot x.$$

  Une famille composée de **deux** vecteurs non colinéaires est liée.

Mise en garde.

Cela ne se généralise pas à trois vecteurs ou plus. Par exemple, les vecteurs $(-1, 1, 0), (0, -1, 1)$ et $(1, 0, -1)$ sont deux à deux non colinéaires, et pourtant ils forment une famille liée puisque :

$$(-1, 1, 0) + (0, -1, 1) + (1, 0, -1) = (0, 0, 0).$$

Exercice 4 Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

- $\mathscr{F}_1 = \Big((1, 1, 1), (1, 2, -1), (-1, 1, 1)\Big)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- $\mathscr{F}_2 = \Big((2, 1), (-1, 3), (0, 2)\Big)$ dans $\mathbb{R}^2$.
- $\mathscr{F}_3 = \Big(X^2 - X + 1, X^2 + X - 2, X^2 - 2X + 3\Big)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- $\mathscr{F}_4 = \Big(x \mapsto 1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}\Big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Propriété 10

Toute famille finie de $\mathbb{K}[X]$ formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Exemple. La famille $(1, X+1, X^3-X)$ est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

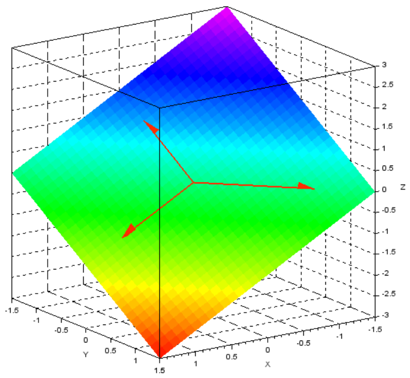
Propriété 11

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres :

$$\exists i \in [\![1,n]\!],\ \exists (\lambda_j)_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}},\ e_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j.$$

Interprétation géométrique de la dépendance linéaire.

- Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, deux vecteurs sont linéairement dépendants si, et seulement si, ils sont colinéaires. Ils sont donc sur une même droite vectorielle.
- Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs sont linéairement dépendants si, et seulement si, ils sont coplanaires, c'est-à-dire contenus dans un même plan vectoriel.



La famille $((-1,1,0),(0,-1,1),(1,0,-1))$ *est liée.*

Propriété 12

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre d'éléments de E, et $x \in E$. Alors :

$$(e_1, \ldots, e_n, x) \text{ est liée } \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Propriété 13

(1) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

(2) Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

La notion de liberté se généralise au cas de familles infinies.

Définition.

On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une *famille libre de E* si :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \quad \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \implies \forall i \in I,\ \lambda_i = 0 \right).$$

Tous les résultats précédents s'étendent immédiatement au cas des familles infinies.

Propriété 14

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.

Exemple. Dans $\mathbb{K}[X]$, $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre car toute sous-famille finie est formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, et est donc libre.

3.2 Familles génératrices

Définition.

Une famille $(e_1,\ldots,e_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite *génératrice de E* si $E=\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_n)$, c'est-à-dire :

$$\forall x\in E,\ \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ x=\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot e_i.$$

Plus généralement, une partie X de E est génératrice si $E=\mathrm{Vect}(X)$.

Exemples.

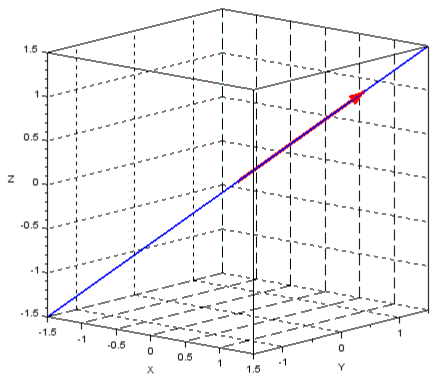
- La famille $(1,i)$ est génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel, (1) est génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
- La famille $(1,X,\ldots,X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

Méthode. Comment trouver une famille génératrice d'un sous-espace F ?
Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel F de E, c'est écrire F sous forme de Vect. Ceci permet de prouver à la fois qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel (si cela n'a pas déjà été fait) et d'en déterminer une famille génératrice.

Exercice 5 1. Déterminer une famille génératrice de

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y=0 \text{ et } x-z=0\}.$$

2. Montrer que $(X^2+2X+3,X^2+X,X+1,3X^2+2X+1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Est-elle libre ?



$((1,1,1))$ est une famille génératrice de F.

Propriété 15

Soit $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E et soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E.

- La famille $\mathscr{F}$ est génératrice de E si, et seulement si, tout élément de $\mathscr{G}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$.
- Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice.

Exemple. La famille $(1, j)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ puisque 1 et j sont combinaisons linéaires de la famille génératrice $(1, i)$.

3.3 Bases

Définition.

Une *base* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une famille libre et génératrice de E.

Propriété 16

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une base de E si, et seulement si, tout vecteur de E s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire de $(e_i)_{i\in I}$:

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)},\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i.$$

Exemple. Nous savons que pour tout élément $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + bi$. Ainsi, $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Nous serons surtout amenés à manipuler les bases finies. Dans ce cas, on dispose de la notion suivante, qui nous permet de nous ramener à $\mathbb{K}^n$.

Définition.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On appelle *vecteur des coordonnées de x en base $\mathscr{B}$* l'unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.

Mise en garde.

Autant l'ordre dans lequel on prend les vecteurs d'une famille n'influe pas sur le fait qu'elle soit libre ou génératrice, autant il est important lorsqu'on manipule une base, puisque les coordonnées dépendent de l'ordre dans lequel on a ordonné les vecteurs de la base.

Exercice 6 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (-1, 1, 0), e_2 = (-1, 0, 1), e_3 = (1, 0, 0)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et préciser les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y, z)$ dans cette base.

Exercice 7 Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(1, X - a, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et préciser les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Exemples.

- **Base canonique de $\mathbb{K}^n$.**

  Dans $\mathbb{K}^n$, on pose :

  $$e_1 = (1,0,0,\dots,0),\ \dots\ ,\ e_i = (0,\dots,0,\underset{i^{eme}\text{ position}}{1},0,\dots,0),\ \dots\ ,\ e_n = (0,0,\dots,0,1).$$

  La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *la base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

- **Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.**

  Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'indice (i,j) : $E_{i,j}$ est la matrice n'ayant que des 0, sauf un 1 en position (i,j).

  La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n,\\ 1\leq j\leq p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée *la base canonique de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- **Bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$.**

  La famille $(1,X,\dots,X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée *la base canonique de* $\mathbb{K}_n[x]$.

  Plus généralement, la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Mise en garde.

« Canonique » veut dire standard, et désigne donc une base qui est sans doute un peu plus naturelle que les autres. Elles sont ainsi appelées par convention, et ce n'est pas vous qui décidez si une base est canonique ou non : les bases ci-dessus sont appelée bases canoniques, et ce sont les seules.

Pour un espace vectoriel quelconque, il n'y a pas de raison qu'une base soit privilégiée par rapport à une autre et mérite le qualificatif de « canonique ».

4 Somme de sous-espaces vectoriels

4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle *somme de F et G*, et on note $F+G$, l'ensemble :

$$F+G = \{x+y,\ (x,y)\in F\times G\}.$$

Ainsi :

$$z\in F+G \quad\Longleftrightarrow\quad \exists (x,y)\in F\times G,\ z=x+y.$$

Propriété 17

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 18

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

(1) $F+G=\text{Vect}(F\cup G)$;

(2) Si H est un sous-espace vectoriel de E contenant F et G, alors $F+G\subset H$.

Propriété 19

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G des sous-espaces de E, et X et Y des parties de E. Si X engendre F et Y engendre G, alors $X\cup Y$ engendre $F+G$. En d'autres termes :

$$\text{Vect}(X\cup Y)=\text{Vect}(X)+\text{Vect}(Y).$$

4.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition.

On dit que la somme $F+G$ est *directe* si pour tout $z\in F+G$, la décomposition $z=x+y$ avec $x\in F$ et $y\in G$ est unique, c'est-à-dire :

$$\forall z\in F+G,\ \exists!(x,y)\in F\times G,\quad z=x+y.$$

On note alors $F\oplus G$.

Propriété 20 (Caractérisation des sommes directes)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors il y a équivalence entre :

(1) F et G sont en somme directe ;

(2) $F\cap G=\{0_E\}$;

(3) $\forall(x,y)\in F\times G,\ \Big(x+y=0_E\implies x=y=0_E\Big)$.

Exercice 8 Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que les espaces $F=\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mid \text{tr}(M)=0\}$ et $G=\text{Vect}(I_n)$ sont en somme directe.

4.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition.

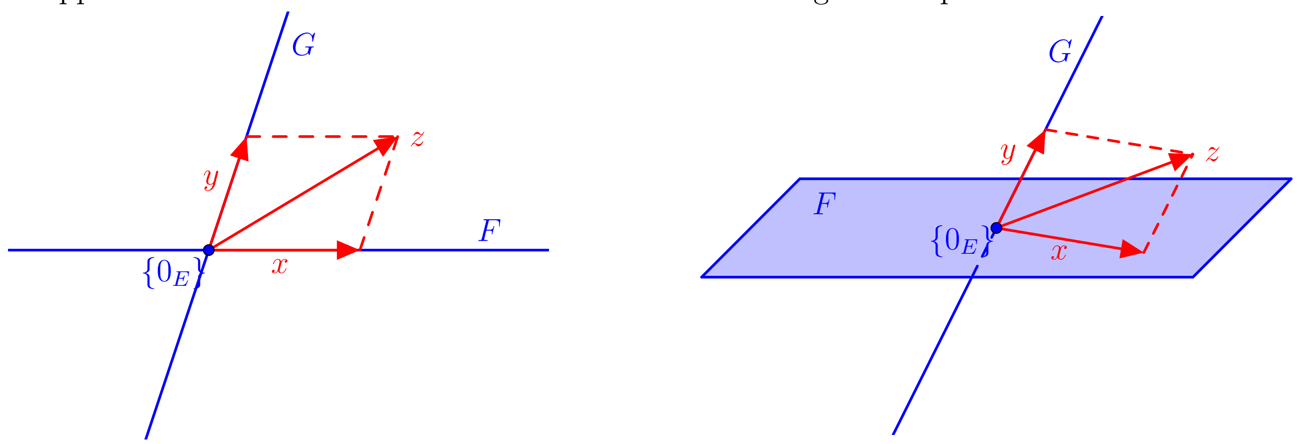
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires dans* E si $E=F\oplus G$. Ainsi :

$$E=F\oplus G\quad\Leftrightarrow\quad\forall z\in E,\ \exists!(x,y)\in F\times G,\ z=x+y$$

Propriété 21 (Caractérisation des supplémentaires)

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Exemple. Même si E n'est pas $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on pourra malgré tout se représenter schématiquement des espaces supplémentaires de E comme suit afin d'avoir une vision géométrique de cette situation.



Représentation schématique de $E = F \oplus G$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 Montrer que les espaces $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 Montrer que les sous-espaces $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Propriété 22

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des familles de vecteurs de F et G respectivement, et $\mathscr{H}$ la famille obtenue par concaténation de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

(1) Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont libres et si $F + G$ est directe, alors $\mathscr{H}$ est libre.

(2) Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont génératrices et si $E = F + G$, alors $\mathscr{H}$ est génératrice.

(3) Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des bases de F et G respectivement et si $E = F \oplus G$, alors $\mathscr{H}$ est une base de E. Cette base est dite *adaptée à la somme directe* $E = F \oplus G$.

Exercice 11 Montrer que la famille $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 23

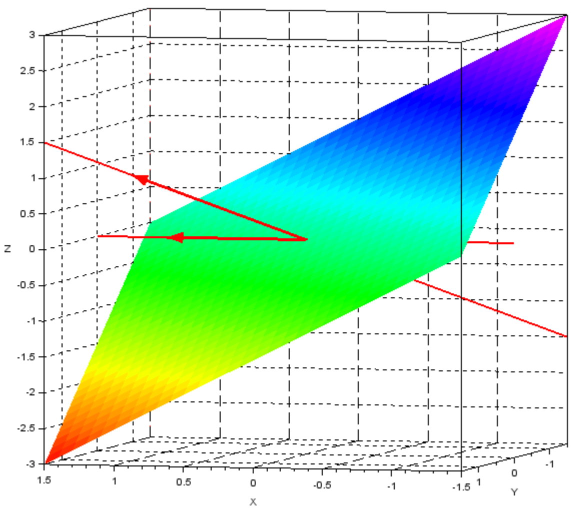
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, et soient $J, K \subset I$ tels que $I = J \cup K$ et $J \cap K = \emptyset$. Posons $F = \text{Vect}(e_j)_{j\in J}$ et $G = \text{Vect}(e_k)_{k\in K}$.

(1) Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre, alors $F + G$ est directe.

(2) Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, alors $E = F + G$.

(3) Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors $E = F \oplus G$.

Exercice 12 Montrer que les sous-espaces $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $H = \text{Vect}((1, 0, 0))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.



Représentations de F, G et H.

Mise en garde.

Comme on le voit dans cet exemple, un sous-espace vectoriel a en général plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'**un** supplémentaire et non du supplémentaire.

4.4 Somme et somme directe de p sous-espaces

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On appelle *somme des* $F_1, \ldots, F_p$ et on note $\sum_{i=1}^{p} F_i$ l'ensemble :

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \{x_1 + \cdots + x_p,\ x_i \in F_i\}.$$

Ainsi :

$$x \in \sum_{i=1}^{p} F_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = x_1 + \cdots + x_p.$$

On généralise alors sans difficultés les propriétés et définitions rencontrées dans le cas de deux sous-espaces.

Propriété 24

(1) $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, X_i est une partie génératrice (finie ou non) de F_i, alors $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ est une partie génératrice de $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

(3) Si G est un sous-espace vectoriel de E contenant tous les F_i, alors $\sum_{i=1}^{p} F_i \subset G$.

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces d'un espace vectoriel E. On dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est *directe*, et on note $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, si :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i,\ \exists!(x_1,\dots,x_p) \in F_1\times\cdots\times F_p,\ x = x_1+\cdots+x_p.$$

Propriété 25

La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si, et seulement si :

$$\forall (x_1,\dots,x_p) \in F_1\times\cdots\times F_p,\quad \Big(x_1+\cdots+x_p = 0_E \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E\Big).$$

Remarque. On déduit immédiatement de cette caractérisation que si $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe, alors pour tout $J \subset [\![1,p]\!]$, $\sum_{i\in J} F_i$ est également directe. En particulier, pour tous $1 \leq i < j \leq p$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$.

Mise en garde.

La réciproque est fausse : ce n'est pas parce que pour tous $1 \leq i < j \leq k$, $F_i\cap F_j = \{0_E\}$ que la somme $\sum_{1\leq i\leq k} F_i$ est directe. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, si $F_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,0))$, $F_2 = \mathrm{Vect}((0,-1,1))$ et $F_3 = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$, on vérifie que $F_1\cap F_2 = F_2\cap F_3 = F_1\cap F_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Pourtant, la somme $F_1+F_2+F_3$ n'est pas directe puisque :

$$(-1,1,0)+(0,-1,1)+(1,0,-1) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

Les sous-espaces $F_1,\dots,F_p$ sont *supplémentaires dans* E si $E=\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Ainsi :

$$E=\bigoplus_{i=1}^{p} F_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\in E,\ \exists!(x_1,\dots,x_p)\in F_1\times\cdots\times F_p,\ x=x_1+\cdots+x_p.$$

Exemple. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_1),\dots,\mathrm{Vect}(e_n)$ sont supplémentaires dans E.