Complément 1

Construction du corps $\mathbb{C}$

Nous avons admis le résultat suivant au début du Chapitre 8, dont la preuve est hors programme.

Théorème 1

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ dont les éléments sont appelés les *nombres complexes*, contenant $\mathbb{R}$ et muni de deux opérations d'addition $+$ et de multiplication $\times$ qui satisfont les assertions suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient un élément i pour lequel $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z peut être écrit d'une et une seule manière sous *forme algébrique* $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
- La somme et le produit de deux réels « au sens de $\mathbb{C}$ » coïncident avec leur somme et leur produit au sens usuel.
- Les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{C}$ sont soumises aux mêmes règles de calcul que leurs analogues dans $\mathbb{R}$.

Le but de ce complément de cours est de présenter une preuve de ce résultat, et donc une construction de $(\mathbb{C}, +, \times)$ à partir de l'ensemble des nombres réels et de ses opérations élémentaires.

Procédons tout d'abord à une analyse du problème, en supposant qu'un tel ensemble $\mathbb{C}$ existe : tout nombre complexe z est défini de manière unique par la donnée d'un couple de réels $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$. Les opérations sur $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ conduisent aux égalités suivantes (puisque $i^2 = -1$) :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad \text{et} \quad z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Par cette analyse, il est naturel de définir $\mathbb{C}$ comme étant l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de deux réels (a, b), et de le munir des opérations $+$ et $\times$ suivantes, définies pour tous (a, b) et (a', b') dans $\mathbb{C}$ par :

- $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- $(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

Il s'agit à présent de montrer que $(\mathbb{C}, +, \times)$ répond bien au problème posé. Pour cela, montrons que les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{C}$ sont soumises aux mêmes règles de calcul que leurs analogues dans $\mathbb{R}$, à savoir :

(i) $\forall \left(z, z'\right) \in \mathbb{C}^2,\ z + z' = z' + z$ (commutativité de l'addition) ;

(ii) $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}^3, z + \left(z' + z''\right) = (z + z') + z''$ (associativité de l'addition) ;

(iii) $\forall z \in \mathbb{C}, z + (0, 0) = (0, 0) + z = z$ ($(0, 0)$ est élément neutre pour l'addition) ;

(iv) $\forall z \in \mathbb{C}, \exists! z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z = (0, 0)$ (existence d'un inverse pour l'addition) ;

(v) $\forall \left(z, z'\right) \in \mathbb{C}^2,\ z \times z' = z' \times z$ (commutativité de la multiplication) ;

(vi) $\forall \left(z, z', z''\right) \in \mathbb{C}^3$, $z \times \left(z' \times z''\right) = \left(z \times z'\right) \times z''$ (associativité de la multiplication) ;

(vii) $\forall z \in \mathbb{C}, (1,0) \times z = z \times (1,0) = z$ (existence d'un élément neutre pour la multiplication) ;

(viii) $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$, $\left(z + z'\right) \times z'' = z \times z'' + z \times z'$ (distributivité de la multiplication sur l'addition) ;

(ix) $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\exists z' \in \mathbb{C}$, $z \times z' = z' \times z = (1,0)$ (existence d'un inverse pour la multiplication).

Les points (i) à (iv) résultent directement des propriétés satisfaites par la somme dans $\mathbb{R}$ (associativité, commutativité, élément neutre). Prouvons à titre d'exemples les propriétés (vii), (viii) et (ix), les autres sont laissées comme exercices.

(vii) Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = (a,b)$. Calculons :

$$z \times (1,0) = (a,b) \times (1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b)$$

et

$$(1,0) \times z = (1,0) \times (a,b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a,b).$$

(viii) Soient $z, z', z'' \in C$. Il existe $(a,b), (a',b'), (a'',b'')$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que $z = (a,b)$, $z' = (a',b')$ et $z'' = (a'',b'')$. Calculons :

$$\begin{aligned}
(z + z') \times z'' &= (a + a', b + b') \times (a'', b'') \\
&= ((a + a') \cdot a'' - (b + b') \cdot b'', (a + a') \cdot b'' + a'' \cdot (b + b')) \\
&= (aa'' - bb'', ab'' + a''b) + (a'a'' - b'b'', a'b'' + a''b') \\
&= (a,b) \times (a'b') + (a', b') \times (a'', b'') = z \times z'' + z' \times z''.
\end{aligned}$$

(ix) Ce point a été démontré en cours. Rappelons la manière de procéder. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \neq (0,0)$ tel que $z = (a,b)$. Posons alors $z' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ (bien défini car $a^2 + b^2 \neq 0$) et calculons :

$$z \times z' = \left(a\frac{a}{a^2+b^2} - b\frac{-b}{a^2+b^2}, a\frac{-b}{a^2+b^2} + b\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$

et

$$z' \times z \overset{\text{(v)}}{=} z \times z' = (1,0).$$

Pour aller plus loin.

Nous rencontrerons de nouveau ces neuf propriétés plus tard, elles donnent à $\mathbb{C}$ le droit de prétendre au titre de corps (commutatif) sur lequel nous reviendrons plus tard, et qui sera d'une importance capitale en algèbre linéaire.

Introduisons à présent les notations définitives. Tout d'abord, on identifie tout élément a de $\mathbb{R}$ à l'élément $(a, 0)$ de $\mathbb{C}$, de telle sorte qu'on assimile $\mathbb{R}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. De plus, pour tous $a, a' \in \mathbb{R}$:

$$(a,0)+(a',0)=(a+a',0) \quad \text{et} \quad (a,0)\times(a',0)=(aa'-0, a\cdot 0+a'\cdot 0)=(aa',0).$$

Ainsi, la somme et le produit de deux réels « au sens de $\mathbb{C}$ » coïncident avec leur somme et leur produit au sens usuel des réels. On notera dans la suite simplement a l'élément $(a, 0)$ de $\mathbb{C}$.

Notons i le couple $(0, 1)$ (notation due à Euler), et remarquons que :

$$i^2=(0,1)\times(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0) \text{ qu'on a simplement noté } -1.$$

Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)\times(b,0) \text{ qu'on note } z=a+ib.$$

Ceci termine cette construction du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ des nombres complexes.

Pour aller plus loin.

Il existe d'autres manières naturelles, toutes équivalentes, de construire le corps des nombres complexes à partir de l'ensemble des nombres réels et de ses opérations élémentaires. Citons-en deux :

- $\mathbb{C}$ peut-être vu comme le sous-ensemble :

  $$\mathbb{C}=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

  de l'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices à deux lignes et deux colonnes. On vérifie que l'ensemble $\mathbb{C}$ ainsi défini est stable par les opérations matricielles habituelles, qui induisent précisément la structure algébrique voulue. En identifiant un réel $a \in \mathbb{R}$ à l'élément $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et en posant $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on vérifie que :

  $$i^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ qu'on a noté } -1$$

  et que pour tout $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$:

  $$z=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ qu'on note } z=a+ib.$$

  On remarquera également qu'avec cette présentation, le déterminant correspond au module au carré, et que la transposition correspond à la conjugaison complexe.

  Ce point de vue fournit une construction naturelle qui peut être adaptée pour obtenir l'algèbre réelle des quaternions. Il donne en outre une interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes comme composition de similitudes du plan, la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ correspondant (dans un sens que nous donnerons plus tard dans l'année) à la transformation $z \mapsto (a + ib) \times z$.

- Une autre construction qui correspond davantage historiquement à l'invention des complexes, est d'introduire i comme l'une des racines de $X^2 + 1 = 0$. Cela nécessite cependant, pour être tout à fait rigoureux, le formalisme des anneaux quotients dont les objets sont des classes d'équivalences de polynômes, et mène à la construction des extensions algébriques de corps. Tout ceci est largement hors programme pour nous.