

## Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.


Dans ce complément de cours, nous présentons diverses méthodes pour l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 1, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Bien que les exercices seront souvent détaillés et qu'aucune connaissance théorique sur ces suites n'est exigible, il est utile de connaître les différentes situations que l'on peut rencontrer, et de savoir comment mener l'étude d'une telle suite selon les cas.

### Représentation graphique

Afin d'avoir une idée du comportement de la suite, ce qui est très utile pour ensuite mener son étude, on commencera par visualiser graphiquement ses premiers termes.

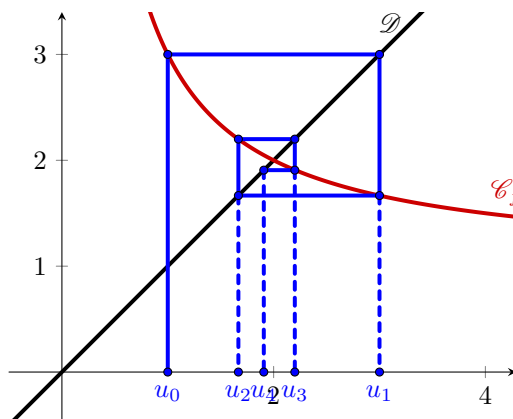
 **Méthode. Représentation graphique de la suite  $(u_n)$ .**

Pour représenter les premiers termes de la suite  $(u_n)$ , on procédera ainsi :

- (i) on effectue l'étude de la fonction  $f$ , puis on trace sur un même graphe sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  ainsi que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .
- (ii) on place  $u_0$  sur l'axe des abscisses.
- (iii) à l'aide de la courbe de  $f$ , on place  $u_1 = f(u_0)$  sur l'axe des ordonnées.
- (iv) grâce à la droite  $\mathcal{D}$ , on replace  $u_1$  sur l'axe des abscisses, puis on réitère le processus sur  $u_1 \dots$

**Exercice.** Représenter graphiquement les premiers termes de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$ .

Commençons par étudier la fonction  $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$ . Son domaine de définition est  $\mathbb{R}^*$ . Elle est continue et dérivable sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $] 0, +\infty[$ , et pour tout  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$ . Elle est donc décroissante sur les intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $] 0, +\infty[$ , et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty$ . Traçons la courbe représentative de  $f$ , et représentons les premiers termes de la suite  $(u_n)$ .



## Existence et encadrement des termes de la suite

### Mise en garde.

Une définition par récurrence n'assure pas l'existence de la suite. En effet, les termes de la suite peuvent sortir du domaine de définition de  $f$ .

**Exemple.** Considérons la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(u_n)$$

Elle n'est bien définie que pour ses trois premiers termes car  $u_1 = \ln(2) \simeq 0,69$ ,  $u_2 = \ln(\ln(2)) \simeq -0,36$ , et donc  $u_3$  n'existe pas car  $u_2$  est sorti du domaine de définition du logarithme.

Pour s'assurer de l'existence de tous les termes de la suite, on choisit donc  $u_0$  dans un intervalle stable de  $f$ .

### Définition.

On dit qu'un intervalle  $J \subset I$  est *stable par  $f$*  si  $f(J) \subset J$ , c'est-à-dire si :

$$\forall x \in J, \quad f(x) \in J.$$

### Méthode. Intervalle stable par $f$ .

Pour montrer qu'un intervalle  $J$  est stable par  $f$ , on pourra selon les cas :

- soit déterminer  $f(J)$  à l'aide du tableau de variation de  $f$  et vérifier que  $f(J) \subset J$  ;
- soit « à la main » : si  $J = [a, b]$  (par exemple) et si  $a \leq x \leq b$ , montrer que  $a \leq f(x) \leq b$ .

**Exercice.** Montrer que l'intervalle  $J = ]0, +\infty[$  est stable par la fonction  $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$ .

| Pour tout  $x \in J$ , on a  $x \in \mathcal{D}_f$  et  $f(x) = 1 + \frac{2}{x} \in J$ . Ainsi  $f(J) \subset J$ , et  $J$  est bien un intervalle stable par  $f$ .

### Méthode. $(u_n)$ bien définie.

Pour montrer que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  existe et  $u_n \in J$  » est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pourra utiliser que  $J$  est stable par  $f$  et faire la récurrence suivante :

**Init.** Puisque  $u_0 \in J$ ,  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hér.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons la propriété vraie au rang  $n$ .

Par hypothèse de récurrence  $u_n$  appartient à  $J \subset \mathcal{D}_f$ . Donc  $u_{n+1} = f(u_n)$  existe bien. De plus, puisque  $J$  est un intervalle stable,  $u_{n+1} \in f(J) \subset J$ . D'où la propriété au rang  $n+1$ .

**Concl.** Par principe de récurrence,  $u_n$  est bien défini et appartient à  $J$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

**Exercice.** On considère toujours la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini, et que  $u_n > 0$ .

Montrons par récurrence que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  existe et  $u_n \in J = ]0, +\infty[$  » est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Init.** Puisque  $u_0 = 1 > 0$ ,  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hér.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons la propriété vraie au rang  $n$ .

Par hypothèse de récurrence,  $u_n > 0$ , donc  $u_{n+1} = f(u_n)$  existe bien. De plus, puisque  $J$  est un intervalle stable

par  $f$ ,  $u_{n+1} \in f(J) \subset J$ . D'où la propriété au rang  $n + 1$ .

**Concl.** Par principe de récurrence,  $u_n$  est bien défini et appartient à  $J$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Variations de la suite

### Cas général


 **Méthode. Monotonie de la suite  $(u_n)$ .**

Pour étudier les variations de la suite  $(u_n)$ , on pourra tenter de comparer directement  $u_n$  et  $u_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en étudiant le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

Si jamais ce signe est trop compliqué à étudier, on pourra se rappeler que  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ . On étudie alors la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$  sur l'intervalle stable  $J$  et on dresse son tableau de signe.

- Si  $g(x) \geq 0$  sur  $J$ , alors quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a en prenant  $x = u_n$  que  $f(u_n) - u_n \geq 0$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \geq u_n$ . La suite  $(u_n)$  est croissante.
- Si  $g(x) \leq 0$  sur  $J$ , alors de même la suite  $(u_n)$  est décroissante.

### Si la fonction $f$ est croissante

 **Méthode. Monotonie de  $(u_n)$  dans le cas  $f$  croissante.**

Si la fonction  $f$  est croissante, on peut toujours montrer que la suite  $(u_n)$  est monotone. On pourra pour cela procéder comme suit :

(i) on compare les deux premiers termes de la suite  $u_0$  et  $u_1$  (éventuellement à l'aide de l'étude de  $g$ ).

(ii) si  $u_0 \leq u_1$ , alors on montre par récurrence que la propriété  $\mathcal{P}(n) : \ll u_n \leq u_{n+1} \gg$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Init.**  $\mathcal{P}(0)$  est vraie puisque par hypothèse,  $u_0 \leq u_1$ .

**Hér.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie et montrons  $\mathcal{P}(n + 1)$ .

Par hypothèse de récurrence,  $u_n \leq u_{n+1}$ . Comme  $f$  est croissante, on a  $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ , soit encore  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ . D'où la propriété au rang  $n + 1$ .

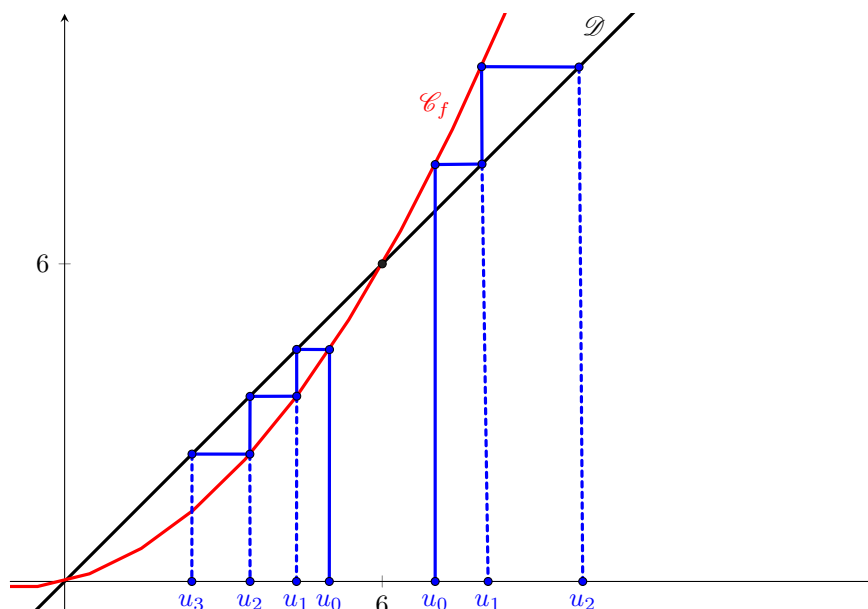
**Concl.** Par principe de récurrence, on a  $u_n \leq u_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et la suite  $(u_n)$  est croissante.

Si  $u_0 \geq u_1$ , alors on montre de même que  $(u_n)$  est décroissante.

**Exercice.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4}$ .

1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite  $(u_n)$  en distinguant les cas suivant la valeur de  $u_0$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$  en fonction de la valeur de  $u_0$ .

1. La fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynomiale de degré 2. Représentons sa courbe qui est une parabole, et les premiers termes de la suite  $(u_n)$ .



On observe graphiquement que :

- si  $u_0 \in ]0, 6[$ , la suite  $(u_n)$  semble décroissante,
- si  $u_0 > 6$ , la suite  $(u_n)$  semble croissante,
- Si  $u_0 = 6$ , la suite  $(u_n)$  semble constante égale à 6.

2. Pour tout  $x > 0$  :

$$g(x) = f(x) - x = \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{4} = \frac{x(x-6)}{8}.$$

Supposons que  $u_0 \in ]0, 6[$ . Alors  $u_1 - u_0 = g(u_0) = \frac{u_0(u_0 - 6)}{8} \leq 0$ , et donc  $u_1 \leq u_0$ . Montrons par récurrence que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_{n+1} \leq u_n$  » est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Init.** On a vu que  $u_1 \leq u_0$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hér.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie et montrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par hypothèse de récurrence,  $u_n \geq u_{n+1}$ . Puisque  $f$  est croissante, on obtient  $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ , soit encore  $u_{n+1} \geq u_{n+2}$ . D'où la propriété au rang  $n+1$ .

**Concl.** Par principe de récurrence,  $u_n \leq u_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et la suite  $(u_n)$  est décroissante lorsque  $u_0 \in ]0, 6[$ .

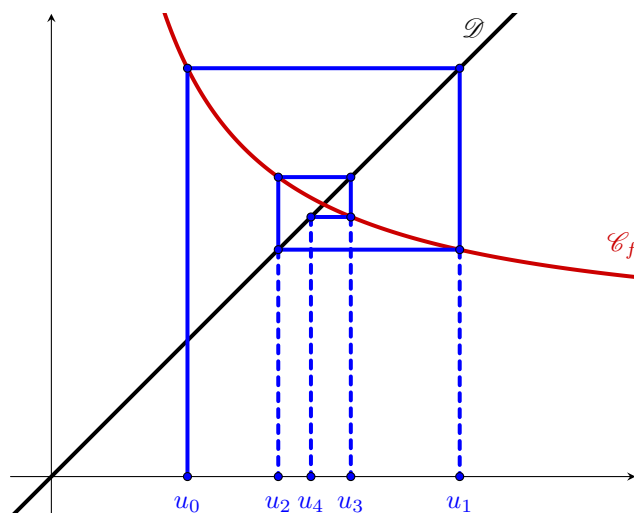
En procédant de même, on montre que  $(u_n)$  est constante si  $u_0 = 6$ , et croissante si  $u_0 > 6$ .

### Mise en garde.

Bien que la fonction  $f$  soit croissante, la suite  $(u_n)$  ne l'est pas forcément : elle est croissante si  $u_0 \leq u_1$  ou décroissante si  $u_0 \geq u_1$ .

### Si la fonction $f$ est décroissante

Dans ce cas, la suite  $(u_n)$  n'est plus monotone, comme nous avons pu le constater dans notre premier exemple :



Cas où  $f$  est décroissante : diagramme en « escargot ».

En revanche, on observe que les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  des termes pairs et impairs de  $(u_n)$  sont monotones et de monotonies contraires. Cela sera toujours le cas.

### Méthode. Étude de $(u_n)$ dans le cas $f$ décroissante.

Si la fonction  $f$  est décroissante, alors on pose  $h = f \circ f$ . Puisque  $f$  est décroissante,  $h$  est croissante. Et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = h(u_{2n+1}).$$

On est donc ramené au cas de deux suites récurrentes  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  pour une fonction croissante  $h$ . On peut donc appliquer les résultats de la section précédente :

- si  $u_0 \leq u_2$ , alors en composant par  $f$  décroissante, on a  $u_1 \geq u_3$  : la suite  $(u_{2n})$  est croissante et la suite  $(u_{2n+1})$  est décroissante.
- si  $u_0 \geq u_2$ , alors de même  $u_1 \leq u_3$  : la suite  $(u_{2n})$  est décroissante et la suite  $(u_{2n+1})$  est croissante.

**Exercice.** On considère toujours la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$ . Étudier la monotonie des suites extraites paire et impaire  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ .

On a  $u_1 = 3$  et  $u_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \geq u_0$ . Montrons alors par récurrence la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_{2n} \leq u_{2n+2}$  » pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Init.** On a  $u_2 \geq u_0$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hér.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie et montrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par hypothèse de récurrence,  $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ . Comme  $f$  est décroissante, on a  $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$ , puis  $f \circ f(u_{2n}) \leq f \circ f(u_{2n+2})$ , soit encore  $u_{2n+2} \leq u_{2n+4}$ . D'où la propriété au rang  $n+1$ .

**Concl.** Par principe de récurrence, on a  $u_{2n} \leq u_{2n+2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et la suite extraite  $(u_{2n})$  est croissante.

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{2n} \leq u_{2n+2} \quad \xrightarrow{f \text{ décr.}} \quad u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}.$$

La suite extraite impaire  $(u_{2n+1})$  est donc décroissante.

## Convergence de la suite

### Limites finies possibles

On suppose que la suite  $(u_n)$  converge vers une **limite finie**  $\ell$  qu'on cherche à déterminer. Pour cela, nous avons besoin de la notion de point fixe.

**Définition.**

On appelle *point fixe* de  $f$  toute solution de l'équation  $f(x) = x$ .

Graphiquement, il s'agit de l'abscisse des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  avec la droite  $\mathcal{D} : y = x$ .

**Théorème 1**

Si  $f$  est **continue** sur un intervalle stable  $J$  et si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in J$  alors  $f(\ell) = \ell$ , et  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .

**Preuve.** Puisque  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , alors  $\lim u_{n+1} = \ell$ . De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$  par continuité de  $f$  en  $\ell \in J$ . On peut donc passer à la limite dans l'égalité  $u_{n+1} = f(u_n)$ , ce qui nous donne  $\ell = f(\ell)$ .  $\square$



**Méthode. Limites finies possibles de  $(u_n)$ .**

Pour déterminer les limites finies **possibles** de la suite  $(u_n)$ , on cherche les points fixes de  $f$ , qui sont aussi les points d'annulation de la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$  sur  $J$

**Convergence lorsque  $f$  est croissante**

Lorsque  $f$  est croissante, nous avons vu que la suite  $(u_n)$  est monotone (croissante ou décroissante). Selon que l'intervalle stable  $J$  est bornée ou non, on pourra utiliser le théorème de la limite monotone pour prouver la convergence de la suite. On rappelle son énoncé.

**Théorème 2 (de la limite monotone)**

- Toute suite croissante et majorée converge.  
Toute suite croissante et non majorée diverge vers  $+\infty$ .
- Toute suite décroissante et minorée converge.  
Toute suite décroissante et non minorée diverge vers  $-\infty$ .

**Exercice.** On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4}$ . Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$  selon la valeur de  $u_0$ .

**Cas  $u_0 \in ]0, 6[$ .**

Nous avons vu que dans ce cas,  $(u_n)$  est décroissante. De plus,  $f(]0, 6[) = ]0, 6[$ , de sorte que l'intervalle  $]0, 6[$  est stable par  $f$ . Par récurrence (que je vous laisse rédiger si nécessaire), on montre que  $u_n \in ]0, 6[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La suite  $(u_n)$  est donc décroissante et minorée (par 0). Par théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $\ell$ . De plus, puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq u_0$ , on en déduit par passage à la limite dans les inégalités que  $0 \leq \ell \leq u_0 < 6$ . Or  $\ell$  est nécessairement un point fixe de  $f$ , de sorte que :

$$f(\ell) = \ell \quad \Rightarrow \quad g(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell(\ell - 6)}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell = 0 \text{ ou } \ell = 6.$$

Puisque  $\ell \in ]0, 6[$ , on en déduit que  $\ell = 0$  et que  $(u_n)$  converge vers 0.

**Cas  $u_0 = 6$ .**

Dans ce cas, la suite  $(u_n)$  est constante, et converge donc vers 6.

**Cas  $u_0 > 6$ .**

Nous avons vu que dans ce cas,  $(u_n)$  est croissante. Par théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $\ell$  ou diverge vers  $+\infty$ . Supposons que  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $\ell$ , alors  $\ell$  est nécessairement un point fixe de  $f$ , et donc  $\ell = 0$  ou  $\ell = 6$ . Or  $u_n \geq u_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puisque  $(u_n)$  est croissante, ce qui donnerait par passage à la limite dans les inégalités,  $\ell \geq u_0 > 6$ . D'où une contradiction. Ainsi  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  dans ce cas.

## Convergence lorsque $f$ est décroissante

Lorsque  $f$  est décroissante, nous avons vu que  $(u_n)$  n'est pas monotone. Cependant les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  le sont. On pourra alors procéder comme suit :

- On pourra étudier la convergence de  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  à l'aide du théorème des suites monotones.
- Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent **vers une même limite**  $\ell$ , alors  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

En effet, on rappelle le résultat suivant.

### Propriété 3 (de convergence à partir des suites extraites paires et impaires)

Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent **vers la même limite**  $\ell$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Exercice.** Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$ .

La fonction  $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$  est continue et décroissante, et on a  $f(1) = 3$  et  $f(3) = \frac{5}{3}$ . On a donc  $f([1, 3]) = [5/3, 3] \subset [1, 3]$ . L'intervalle  $[1, 3]$  est donc stable par  $f$ , et on montre par récurrence (que je vous laisse là encore rédiger si nécessaire) que  $u_n \in [1, 3]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont donc bornées (entre 1 et 3) et on a établi qu'elles sont monotones. Elles convergent donc vers des limites finies  $\ell$  et  $\ell'$  respectivement par le théorème de limite monotone, toutes deux dans l'intervalle  $[1, 3]$ .

De plus,  $\ell$  et  $\ell'$  sont nécessairement des points fixes de la fonction  $h = f \circ f$ . On cherche donc les points fixes de  $h$  dans l'intervalle  $[1, 3]$ . On a :

$$h(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = x \Leftrightarrow \frac{3x + 2}{x + 2} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2.$$

La seule solution dans  $[1, 3]$  est 2, donc les deux suites convergent vers la même limite, à savoir 2.

Puisque  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent toutes deux vers 2, on en déduit que  $(u_n)$  est elle aussi convergente vers 2.

## Convergence par l'inégalité des accroissements finis

On peut aussi utiliser dans certains cas l'inégalité des accroissements finis pour montrer que la distance entre  $u_n$  et sa limite possible  $\ell$  tend vers 0. On en rappelle l'énoncé.

### Théorème 4 (Inégalité des accroissements finis)

Si  $f$  est **dérivable** sur  $J$ , et s'il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $x \in J$ ,  $|f'(x)| \leq M$ , alors

$$\forall (a, b) \in J^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

### Méthode. Convergence de $(u_n)$ à l'aide de l'IAF.

Pour montrer la convergence de  $(u_n)$  vers un point fixe  $\ell \in J$  à partir de l'inégalité des accroissements finis, on procédera ainsi :

- on majore  $|f'|$  par une constante  $M$  sur l'intervalle stable  $J$  contenant les termes de la suite. Il faut pour que cette méthode fonctionne que  $0 \leq M < 1$  ;
- on applique l'inégalité des accroissements finis à  $f$  avec  $b = u_n$  et  $a = \ell$  pour obtenir

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq M|u_n - \ell|.$$

(iii) on montre par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$  ».

**Init.**  $\mathcal{P}(0)$  découle de l'inégalité des accroissements finis avec  $a = \ell$  et  $b = u_0$ .

**Hér.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

Par hypothèse de récurrence,  $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$ . Alors :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M |u_n - \ell| \leq M \times M^n |u_0 - \ell| = M^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

**Concl.** Par principe de récurrence,  $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(iv) Si  $M \in [0, 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n |u_0 - \ell| = 0$ , et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  par encadrement.

**Calcul approché du point fixe.** Si  $J = [a, b]$ , le calcul précédent nous donne une estimation de l'erreur :

$$|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell| \leq M^n |b - a|.$$

Ainsi,  $u_n$  constitue une estimation du point fixe  $\ell$  de  $f$  avec une précision au moins égale à  $M^n |b - a|$ .

**Exercice.** Reprenons la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, 1]$ .
2. Montrer que pour tout  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n|$ . En déduire que  $|u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ . Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

1. L'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f : x \mapsto \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}$ . Par récurrence (que je vous laisse rédiger),  $u_n$  appartient à  $[0, 1]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. La fonction  $f$  est polynomiale, donc continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$ . De plus pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $|f'(x)| = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ . Par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On applique l'inégalité précédente avec  $x = u_n$  et  $y = 0$  :

$$|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n|.$$

Par récurrence (que je vous laisse rédiger comme ci-dessus), on obtient que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|u_n| \leq \frac{1}{2^n} |u_0| = \frac{1}{2^n}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ , on obtient par théorème d'encadrement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  existe et vaut 0.