DM11

Devoir maison à rendre le 01/04/2025

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$.

1. On suppose dans cette question $a = 0$ et l'asymptote $\mathscr{D}$ horizontale.

   (a) Montrer que f est décroissante. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.

   (b) On suppose de plus f dérivable. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

2. On ne suppose plus D horizontale.

   (a) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.

   (b) On suppose de plus f dérivable. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$.

Exercice 2 (Involutions de $[\![1, n]\!]$)

Si E est un ensemble fini, on appelle involution de E toute application $\sigma : E \to E$ telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_E$.

On note alors I_E l'ensemble des involutions de E, et si $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n l'ensemble des involutions de $[\![1, n]\!]$.

Enfin, on notera i_n le cardinal de l'ensemble I_n, et on posera $i_0 = 1$.

1. Soient E et F deux ensembles finis, et soit $\varphi : E \to F$ une bijection entre E et F.

   Montrer que $\sigma \mapsto \varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$ réalise une bijection de I_F sur I_E.

   On en déduit que I_F et I_E sont de même cardinal. En particulier, si E est de cardinal n, alors I_E a pour cardinal i_n.

Partie I. Développement limité de $e^{x+x^2/2}$.

Dans la suite, on note $\varphi : x \mapsto \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$.

2. Donner le $DL_4(0)$ de φ.

3. Montrer que φ est solution de l'équation différentielle $y' = (1 + x)y$.

4. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, φ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^{(k+1)}(x) = (1 + x)\varphi^{(k)}(x) + k\varphi^{(k-1)}(x).$$

5. Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ possède un $DL_n(0)$, que l'on notera

$$\varphi(x) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$$

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = a_k + k a_{k-1}$.

Partie II. Nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$.

7. Calculer i_1, i_2 et i_3.

8. Soit $n \geq 2$, et soit $\sigma \in I_{n+1}$.

   (a) On suppose que $\sigma(n+1) = n+1$.

   Montrer que $[\![1,n]\!]$ est stable par σ et que $\sigma_{n+1} : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ j & \longmapsto & \sigma(j) \end{array}$ est dans I_n.

   En déduire que l'application $\sigma \mapsto \sigma_{n+1}$ réalise une bijection de $\{\sigma \in I_{n+1} \mid \sigma(n+1) = n+1\}$ sur I_n.

   (b) On suppose que $\sigma(n+1) = k \in [\![1,n]\!]$.

   Montrer que $[\![1,n]\!] \backslash \{k\}$ est stable par σ et que $\sigma_k : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \backslash \{k\} & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \backslash \{k\} \\ j & \longmapsto & \sigma(j) \end{array}$.

   En déduire que l'application $\sigma \mapsto \sigma_k$ réalise une bijection de $\{\sigma \in I_{n+1} \mid \sigma(n+1) = k\}$ sur $I_{[\![1,n]\!] \backslash \{k\}}$.

9. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $i_{n+1} = i_n + n i_{n-1}$.

10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n = a_n$.

Partie III. Une expression de i_n.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{\frac{x^2}{2}} \underset{x \to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$ le $DL_n(0)$ de $e^{\frac{x^2}{2}}$.

11. Sans chercher à calculer les b_k pour l'instant, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.

12. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer b_{2p} et b_{2p+1}.

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k k!(n-2k)!}$.
