

Correction du devoir maison

Exercice 1

1. (a) On peut répondre simplement que $\mathcal{H}(A)$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire **homogène** d'une équation à n inconnues, et donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n .

On peut aussi utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n .

- $X = 0_{\mathbb{K}^n}$ appartient à $\mathcal{H}(A)$ car $A^\top X = 0$.
- Soient $X, Y \in \mathcal{H}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors par les règles du calcul matriciel :

$$A^\top(\lambda X + Y) = \lambda A^\top X + A^\top Y \stackrel{X, Y \in \mathcal{H}(A)}{=} \lambda 0 + 0 = 0.$$

Donc $\lambda X + Y$ appartient à $\mathcal{H}(A)$.

Ainsi, $\mathcal{H}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n pour tout $A \in \mathbb{K}^n$.

- (b) Notons tout de suite que $F = \mathcal{H}(1, 2, 1, 1) \cap \mathcal{H}(1, 3, 2, 0) \cap \mathcal{H}(1, 0, -1, 3)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n car intersection de sous-espaces. De plus, pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$X \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ x - z + 3t = 0 \end{cases} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ y + z - t = 0 \\ -2y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ y + z - t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - z + 3t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$$

On identifie les inconnues principales, x et y , et paramètres, z et t . Ainsi :

$$F = \{(z - 3t, -z + t, z, t), z, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((1, -1, 1, 0), (-3, 1, 0, 1)\right).$$

On retrouve ici que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^4 . De plus, la famille $\mathcal{F} = \left((1, -1, 1, 0), (-3, 1, 0, 1)\right)$ est génératrice de F , et libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de F .

Ainsi, $\mathcal{H}(1, 2, 1, 1) \cap \mathcal{H}(1, 3, 2, 0) \cap \mathcal{H}(1, 0, -1, 3)$ est de dimension $\text{Card}(\mathcal{F}) = 4$.

- (c) Soit $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ non nul : il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_k \neq 0$.

Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors :

$$X \in \mathcal{H}(A) \Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \Leftrightarrow x_k = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{a_i}{a_k} x_i.$$

On identifie inconnue principale, x_k , et inconnues paramètres, $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$. D'où, en notant (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A) &= \left\{ \left(x_1, \dots, x_{k-1}, - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{a_i}{a_k} x_i, x_{k+1}, \dots, x_n \right), x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n x_i \left(e_i - \frac{a_i}{a_k} e_k \right), x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(e_1 - \frac{a_1}{a_k} e_k, \dots, e_{k-1} - \frac{a_{k-1}}{a_k} e_k, e_{k+1} - \frac{a_{k+1}}{a_k} e_k, \dots, e_n - \frac{a_n}{a_k} e_k \right) \end{aligned}$$

Notons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}$, $u_i = e_i - \frac{a_i}{a_k} e_k$. La famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}}$ est génératrice de $\mathcal{H}(A)$. Montrons qu'elle est libre. Soit pour cela $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On résout :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}} \alpha_i u_i = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}} \alpha_i \left(e_i - \frac{a_i}{a_k} e_k \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}} \alpha_i e_i + \left(- \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}} \alpha_i \frac{a_i}{a_k} \right) e_k = 0 \end{aligned}$$

La famille (e_1, \dots, e_n) étant libre, ceci équivaut à $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$.

Ainsi, \mathcal{F} est une famille libre, donc une base de $\mathcal{H}(A)$, et $\dim(\mathcal{H}(A)) = \text{Card}(\mathcal{F}) = n - 1$.

Si $A = (0, \dots, 0)$, alors tout X de \mathbb{K}^n appartient à $\mathcal{H}(A)$ puisque $A^\top X = 0$. Ainsi

$$\mathcal{H}(A) = \mathbb{K}^n.$$

Remarque. Cette question, bien qu'élémentaire, est assez pénible à rédiger. Nous aurons un moyen plus efficace (et agréable) d'obtenir la dimension de $\mathcal{H}(A)$ dans un prochain chapitre.

2. (a) Supposons que $b_t = 0$. Alors $X = e_t$ (t -ème vecteur de la base canonique) appartiendrait à $\mathcal{H}(B)$ puisque $B^\top e_t = b_t = 0$. Et puisque $\mathcal{H}(B) = \mathcal{H}(A)$, on aurait aussi $0 = A^\top e_t = a_t$, ce qui est faux.

Donc b_t est non nul.

- (b) Prenons X dans $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(B)$, et montrons que X appartient à $\mathcal{H}(a_t B - b_t A)$:

$$(a_t B - b_t A)^\top X = a_t B^\top X - b_t A^\top X \stackrel{X \in \mathcal{H}(A) \text{ et } \mathcal{H}(B)}{=} a_t \times 0 - b_t \times 0 = 0.$$

Ainsi $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{H}(a_t B - b_t A)$.

Puisque $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{H}(a_t B - b_t A)$ et que $\dim(\mathcal{H}(A)) = n - 1$ d'après la question 1.(c), la dimension de $\mathcal{H}(a_t B - b_t A)$ est $n - 1$ ou n . Mais :

$$A^\top e_t = a_t \neq 0 \quad \text{et} \quad (a_t B - b_t A)^\top e_t = a_t B^\top e_t - b_t A^\top e_t = a_t b_t - b_t a_t = 0.$$

Donc e_t appartient à $\mathcal{H}(a_t B - b_t A)$, mais pas à $\mathcal{H}(A)$. L'inclusion $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{H}(a_t B - b_t A)$ est donc stricte, et $\dim(\mathcal{H}(a_t B - b_t A)) \neq n - 1$ par conséquent.

Ainsi, $\dim(\mathcal{H}(a_t B - b_t A)) = n$, et $\mathcal{H}(a_t B - b_t A) = \mathbb{K}^n$. Par la question 1.(c), ceci est possible uniquement si $a_t B - b_t A = 0$, ce qui se réécrit $B = \frac{a_t}{b_t} A$: A et B sont colinéaires.

3. Supposons la famille (A, B) libre. Alors $\mathcal{H}(A) \neq \mathcal{H}(B)$ par la question précédente. De plus, A et B sont non nuls¹ et $\dim(\mathcal{H}(A)) = \dim(\mathcal{H}(B)) = n - 1$.

Considérons le sous-espace $F = \mathcal{H}(A) + \mathcal{H}(B)$. Il contient $\mathcal{H}(A)$ et $\mathcal{H}(B)$ donc est de dimension $n - 1$ ou n . Si sa dimension est $n - 1$, alors $\mathcal{H}(A) = F = \mathcal{H}(B)$, ce qui est faux puisque la famille (A, B) est libre. Donc $\dim(F) = n$, et par la formule de Grassmann :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{H}(A) \cap \mathcal{H}(B)) &= \dim(\mathcal{H}(A)) + \dim(\mathcal{H}(B)) - \dim(\mathcal{H}(A) + \mathcal{H}(B)) \\ &= (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons $\mathcal{H}(A) \cap \mathcal{H}(B)$ de dimension $n - 2$. Alors $\mathcal{H}(A) \neq \mathcal{H}(B)$ car sinon $\mathcal{H}(A) \cap \mathcal{H}(B) = \mathcal{H}(A)$ serait de dimension au moins $n - 1$. Par la question précédente, A et B ne sont pas colinéaires, et la famille (A, B) est libre.

¹Une famille contenant le vecteur nul est liée.

4. (a) La famille (A_1, \dots, A_p) étant libre, on peut la compléter en une base (A_1, \dots, A_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont données par A_1, \dots, A_n . Pour montrer que la matrice A est inversible, il faut et il suffit de montrer que le système linéaire $AX = 0$ admet pour unique solution $X = 0$. Soit donc $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0_{n,1}$. Par les règles de calcul matriciel, cette égalité se réécrit :

$$x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = 0_{n,1}.$$

Par liberté de la famille (A_1, \dots, A_n) , on obtient $x_1 = \dots = x_n = 0$. Ainsi, $X = 0_{n,1}$ et la matrice A est inversible.

Remarque. Nous avons utilisé qu'une matrice A est inversible si, et seulement si, le système linéaire $AX = 0$ admet pour unique solution $X = 0_{n,1}$. Rappelons brièvement sa démonstration.

Le système $AX = 0_{n,1}$ est formé de n équations avec n inconnues. Il admet une unique solution $X = 0_{n,1}$ si, et seulement si, il est de rang $r = n$, soit si, et seulement si, la matrice échelonnée obtenue après application de l'algorithme de Gauss à A possède n pivots. Or ceci est bien équivalent à l'inversibilité de A .

- (b) Puisque A est inversible, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A \times B = I_n$. Notons alors (B_1, \dots, B_n) les vecteurs colonnes de B . Par définition du calcul matriciel, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\delta_{i,j} = [I_n]_{i,j} = [A \times B]_{i,j} = A_i^\top \times B_j.$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_n B_n = 0_{n,1}.$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient par multiplication par A_i^\top à gauche :

$$0 = A_i^\top \times (\alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_n B_n) = \underbrace{\alpha_1 A_i^\top B_1}_{=0} + \dots + \underbrace{\alpha_i A_i^\top B_i}_{=1} + \dots + \underbrace{\alpha_n A_i^\top B_n}_{=0} = \alpha_i.$$

Ainsi, la famille (B_1, \dots, B_n) est libre, de cardinal $n = \dim(\mathbb{K}^n)$: c'est une base de \mathbb{K}^n .

Remarque. Nous venons entre autres de montrer que pour une matrice inversible, la famille de ces vecteurs colonnes est une base de \mathbb{K}^n . Et nous avons montré la réciproque à la question précédente. Nous retrouverons ce résultat dans un prochain chapitre lorsque nous définirons convenablement le rang d'une matrice.

- (c) Soit $X \in \mathbb{K}^n$. Puisque (B_1, \dots, B_n) est une base de \mathbb{K}^n , il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (uniques) tels que :

$$X = \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_n B_n.$$

Alors :

$$\begin{aligned} X \in \bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathcal{H}(A_i) &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, X \in \mathcal{H}(A_i) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, A_i^\top X = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_1 A_i^\top B_1 + \dots + \alpha_n A_i^\top B_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \in \text{Vect}(B_{p+1}, \dots, B_n). \end{aligned}$$

(B_1, \dots, B_n) libre

Ainsi $\bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathcal{H}(A_i) = \text{Vect}(B_{p+1}, \dots, B_n)$.

Remarque. En particulier, on a montré à cette question que si (A_1, \dots, A_p) est une famille libre, alors :

$$\dim \left(\bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathcal{H}(A_i) \right) = \dim (\text{Vect}(B_{p+1}, \dots, B_n)) = n - r$$

car la famille (B_{p+1}, \dots, B_n) est libre.

5. Supposons que la famille (A_1, \dots, A_p) est de rang r . Quitte à renuméroter les vecteurs de cette famille, on peut supposer que la famille (A_1, \dots, A_r) est libre, et que pour tout $k \in \llbracket r+1, p \rrbracket$, A_k est combinaison linéaire de A_1, \dots, A_r : il existe $\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,r}$ des scalaires tels que :

$$A_k = \alpha_{k,1}A_1 + \dots + \alpha_{k,r}A_r.$$

Montrons que :

$$\bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathcal{H}(A_i) = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathcal{H}(A_i).$$

L'inclusion $\bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathcal{H}(A_i) \subset \bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathcal{H}(A_i)$ est évidente.

Réciproquement, considérons $X \in \bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathcal{H}(A_i)$. Pour tout $k \in \llbracket r+1, p \rrbracket$:

$$\begin{aligned} A_k^\top X &= (\alpha_{k,1}A_1 + \dots + \alpha_{k,r}A_r)^\top X \\ &= \alpha_{k,1} \underbrace{A_1^\top X}_{=0} + \dots + \alpha_{k,r} \underbrace{A_r^\top X}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Donc X appartient à $\bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathcal{H}(A_i)$. Ainsi, $\bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathcal{H}(A_i) = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathcal{H}(A_i)$.

Puisque (A_1, \dots, A_r) est une famille libre, par application de la question 4 :

$$\dim \left(\bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathcal{H}(A_i) \right) = \dim \left(\bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathcal{H}(A_i) \right) = n - r.$$

Remarques. Nous avons établi les résultats suivants dans ce devoir maison :

- si A est un vecteur non nul, alors $\mathcal{H}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n de dimension $n - 1$. Un tel sous-espace de dimension $\dim(\mathbb{K}^n) - 1$ est appelé un *hyperplan de \mathbb{K}^n* .
- deux hyperplans d'équations données par A et B non nuls sont égaux si, et seulement si, A et B sont colinéaires.
- l'intersection des r hyperplans d'équations définies par les vecteurs A_1, \dots, A_r linéairement indépendants, est de dimension $n - r$.

Nous retrouverons ces résultats dans un prochain chapitre, avec un point de vue un peu différent (et plus général) caractérisant les hyperplans à l'aide de formes linéaires.