DM12

Devoir maison à rendre le 06/05/2025

Suite des noyaux et images itérés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$N_k = \mathrm{Ker}(u^k) \quad \text{et} \quad I_k = \mathrm{Im}(u^k).$$

I. Étude d'un exemple

Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$u(e_1) = 0 \quad , \quad u(e_2) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \quad , \quad u(e_3) = e_1.$$

1. Déterminer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k. On en donnera une base.
2. Montrer que N_2 et I_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que N_2 et I_2 sont stables par u, que l'endomorphisme induit par u sur N_2 est un endomorphisme nilpotent dont on précisera l'ordre de nilpotence, et que l'endomorphisme induit par u sur I_2 est une homothétie de rapport 2.

II. Monotonie

4. Montrer que pour tout entier naturel k, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
5. On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrer que pour tout entier naturel k, $N_p = N_{p+k}$.
6. On suppose qu'il existe un entier naturel q tel que $I_q = I_{q+1}$. Montrer que pour tout entier naturel k, $I_q = I_{q+k}$.

III. En dimension finie

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est supposé de dimension finie non nulle n. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $n_k = \dim(N_k)$ et $i_k = \dim(I_k)$

7. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ N_k \subsetneq N_{k+1} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ (k \geq p \ \Rightarrow\ N_k = N_{k+1}) \end{cases}$.

   Indication : on pourra considérer la suite (n_k) des dimensions.
8. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} \forall k \in [\![0, q-1]\!],\ I_k \subsetneq I_{k+1} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ (k \geq q \ \Rightarrow\ I_k = I_{k+1}) \end{cases}$.
9. Montrer que $p = q$ et que $p \leq n$.
10. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.
11. Montrer que N_p et I_p sont stables par u, que l'endomorphisme induit par u sur N_p est un endomorphisme nilpotent dont on précisera l'ordre de nilpotence, et que l'endomorphisme induit par u sur I_p est un automorphisme de I_p.

12. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\delta_k = i_k - i_{k+1}$. On désire montrer que la suite (δ_k) est décroissante.

    (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k = n_{k+1} - n_k$.

    (b) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel D_k tel que $I_k = I_{k+1} \oplus D_k$ et déterminer $\dim(D_k)$.

    (c) Établir que $I_{k+1} = I_{k+2} + u(D_k)$.

    (d) En déduire que $\delta_{k+1} \leq \delta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

    (e) **Application.** Supposons que u soit un endomorphisme nilpotent et que $\dim(Ker(u)) = 1$. Déterminer l'indice de nilpotence de u.

IV. Cas de la dimension quelconque

Dans cette partie, l'espace vectoriel E n'est plus supposé de dimension finie.

13. (a) Donner un exemple d'espace vectoriel E et d'endomorphisme u de E où la suite (N_k) est constante à partir d'un certain rang et la suite (I_k) est strictement décroissante (au sens de l'inclusion).

    (b) Même question avec la suite (N_k) strictement croissante (au sens de l'inclusion) et la suite (I_k) constante à partir d'un certain rang.

14. On suppose que les suites (N_k) et (I_k) sont constantes à partir d'un certain rang, et on introduit les entiers p et q définis comme à la section II.

    (a) Montrer que pour tout entier naturel k :

    $$(N_k = N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} = I_{k+2}) \ \Rightarrow \ (I_k = I_{k+1}),$$

    $$(I_k = I_{k+1} \text{ et } N_{k+1} = N_{k+2}) \ \Rightarrow \ (N_k = N_{k+1}).$$

    (b) En déduire que $p = q$.