DM4

Devoir maison à rendre le 04/11/2024

Exercice 1 (Formules de Machin et Gregory)

Partie I. La formule de Machin

1. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, donner une expression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

   En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis justifier que $\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$.

2. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$.

3. En déduire que $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Cette formule est connue sous le nom de formule de Machin (du nom de John Machin, 1680-1751).

Partie II. La formule de Gregory

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$.

4. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{1}{1+t^2} = S_n'(t) + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

5. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $\arctan(x) = S_n(x) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

6. En remarquant que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$, prouver que :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1}(x) \leq \arctan(x) \leq S_{2n}(x) \quad \text{et} \quad |\arctan(x) - S_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

7. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ fixé, $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \arctan(x)$ (*Formule de Gregory*).

La formule de Machin, combinée à la formule de Gregory a longtemps constitué le moyen le plus efficace de calculer des décimales de π. Le mathématicien amateur Williams Shanks (1812-1882) y a consacré 15 ans de sa vie et a obtenu les 707 premières décimales de π (dont seulement 527 étaient correctes), ce qui a constitué un record jusqu'en 1946.

Exercice 2 (Points fixes de l'exponentielle complexe)

Le but de cet exercice est de déterminer les points fixes de l'exponentielle complexe, c'est-à-dire les $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = z$.

Dans la suite, pour $z \in \mathbb{C}$, on notera $\exp(z)$ le nombre complexe e^z.

Partie I. Existence de points fixes de l'exponentielle

1. On note f la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{\tan(x)}\right) - \dfrac{x}{\sin(x)}$.

   (a) Déterminer les limites en 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$ et $\dfrac{\tan x}{x}$.

   (b) Justifier qu'il existe $b \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b) = 0$.

   (c) Prouver alors que $z = \dfrac{b}{\tan b} + ib$ est un point fixe de l'exponentielle.

Partie II. Détermination de l'ensemble des points fixes de l'exponentielle

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $\exp(\bar{z})$ en fonction de $\exp(z)$.

   En déduire qu'il suffit de déterminer les points fixes dont la partie imaginaire est strictement positive.

Dans la suite, on note $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & te^{-t} \end{array}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ un point fixe de l'exponentielle complexe, et soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. On suppose de plus que $y > 0$.

   (a) Donner le module et un argument de $\exp(z)$ en fonction de x et y.

   (b) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = 2k\pi + \arccos(\varphi(x))$.

   (c) Prouver alors que $e^x\sqrt{1 - \varphi(x)^2} - \arccos(\varphi(x)) = 2k\pi$.

4. On note δ la fonction définie là où c'est possible par $\delta(t) = e^t\sqrt{1 - \varphi(t)^2} - \arccos(\varphi(t))$.

   (a) Étudier les variations de φ, puis montrer que l'ensemble de définition de δ est un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Justifier la dérivabilité de δ sur $]\alpha, +\infty[$ et prouver que :

   $$\forall t \in]\alpha, +\infty[, \quad \delta'(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - \varphi(t)^2}}\left(e^{2t} + 1 - 2t\right).$$

   En déduire le tableau de variations de δ.

   (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'équation $\delta(t) = 2k\pi$, d'inconnue $t \in [\alpha, +\infty[$ possède une et une seule solution x_k.

   On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = 2k\pi + \arccos(\varphi(x_k))$.

   (d) Montrer que $x_k + iy_k$ est un point fixe de l'exponentielle complexe.

5. Déterminer l'ensemble de tous les points fixes de l'exponentielle complexe.