DM6

Devoir maison à rendre le 10/12/2024

Exercice 1

On cherche à résoudre sur $I =]-1,1[$ l'équation :

$$(x^2-1)y'' + 3xy' - 8y = 2x. \qquad (E)$$

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I.

   On pose $J =]0,\pi[$ et :
   $$z : \begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(t)\cdot y(\cos(t)) \end{array}.$$

   (a) Montrer que z est deux fois dérivable sur J et calculer z' et z''.

   (b) Montrer que :
   $$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow z \text{ solution de } (E') \text{ sur } J,$$
   où :
   $$z'' + 9z = -2\cos(t)\sin(t). \qquad (E')$$

2. Résoudre (E') sur J.

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur I. On écrira les solutions sous forme simplifiée.

Exercice 2 (Théorème des deux carrés)

On pose $\mathscr{E} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists a,b \in \mathbb{N},\ n = a^2+b^2\}$.

1. (a) Montrer que $\mathscr{E}$ est stable par produit en faisant un tour du côté des nombres complexes.

   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathscr{E}$ impair, $p \equiv 1\,[4]$.

2. Soient $n,a,b \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n divise a^2+b^2, que $a \wedge b = 1$ et que n n'est pas un carré parfait.

   On rappelle que pour tous $r,s \in \mathbb{R}$ pas nécessairement entiers, $[\![r,s]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid r \leqslant k \leqslant s\}$.

   (a) Comparer le cardinal de $[\![0,\sqrt{n}]\!]^2$ et celui de $[\![0,n-1]\!]$. Quelle propriété de l'application qui associe à tout couple $(x,y) \in [\![0,\sqrt{n}]\!]^2$ le reste de la division euclidienne de $ax+by$ par n en déduit-on ?

   (b) En déduire l'existence d'un couple $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ pour lequel $(u,v) \neq (0,0)$, $|u| < \sqrt{n}$, $|v| < \sqrt{n}$ et n divise $au+bv$.

   (c) Montrer que n divise $a^2u^2 - b^2v^2$, puis que n divise u^2+v^2.

   (d) En déduire que $n \in \mathscr{E}$.

3. Soit $p \in \mathbb{P}$ impair. Pour tous $x,y \in [\![1,p-1]\!]$, on dit que $x \sim y$ si $x = y$ ou $xy \equiv 1\,[p]$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in [\![1,p-1]\!]$, il existe un et un seul entier $y \in [\![1,p-1]\!]$ pour lequel $xy \equiv 1[p]$.

   (b) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $[\![1,p-1]\!]$.

   (c) Soit $x \in [\![1,p-1]\!]$. À quelle condition nécessaire et suffisante la classe d'équivalence de x est-elle un singleton ? Quel est son cardinal dans le cas contraire ?

   (d) En déduire le théorème de Wilson : $(p-1)! \equiv -1\,[p]$.

   (e) On pose $m = \dfrac{p-1}{2}$. Montrer, grâce au produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} k(p-k)$, que $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1}\,[p]$.

(f) En déduire que si $p \equiv 1\,[4]$, alors $p \in \mathscr{E}$.

4. Montrer finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n est la somme de deux carrés parfaits si, et seulement si, $v_p(n)$ est pair pour tout $p \in \mathbb{P}$ congru à 3 modulo 4 .

Le résultat de la question 4. est appelé le *théorème des deux carrés*. Énoncé pour la première fois sans preuve au $17^{\text{ème}}$ siècle, ce théorème qui a marqué les mathématiques a été démontré un siècle plus tard par le Suisse Leonhard Euler (1707 - 1783). D'après les questions 1.(b) et 3.(f), en particulier, un nombre premier impair est la somme de deux carrés parfaits si et seulement s'il est congru à 1 modulo 4 .
