DM8

Correction du devoir maison

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ et $g_n : x \in I_n \mapsto \tan(x) - x$. La fonction g_n est continue et dérivable sur I_n, et pour tout $x \in I_n$, $g_n'(x) = \tan^2(x) > 0$, et $g_n'(n\pi) = 0$. Elle est donc strictement croissante sur I_n, et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi} g_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2} + n\pi} g_n(x) = -\infty$.

   Par le théorème de la bijection, g_n réalise une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$. L'équation $g_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur I_n qu'on notera x_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leq x_n \leq \frac{\pi}{2} + n\pi$ par définition de x_n, d'où $-\frac{1}{2n} + 1 \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq \frac{1}{2n} + 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim \frac{x_n}{n\pi}$ existe et vaut 1. En d'autres termes, $x_n \sim n\pi$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $y_n = x_n - n\pi$. Par la question précédente, $y_n = o(n\pi)$, et $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par π-périodicité de tan :

$$\tan(y_n) = \tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$$

   par définition de x_n. En appliquant arctan (bijection réciproque de tan restreinte à I_0), on obtient :

$$y_n = \arctan(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi/2 \quad \text{car} \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty.$$

   D'où $y_n \sim \dfrac{\pi}{2}$ et $y_n - \frac{\pi}{2} = o(1)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons à présent $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = o(1)$. Alors :

$$\tan(z_n) = \tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(y_n)} = \frac{-1}{x_n} \sim \frac{-1}{n\pi}.$$

   Or $z_n = o(1)$, donc $\tan(z_n) \sim z_n$. Ainsi, $z_n \sim \dfrac{-1}{n\pi}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Cherchons un équivalent de $t_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} = z_n + \frac{1}{n\pi}$. Par la question précédente, $t_n = o\left(\frac{1}{n\pi}\right)$. Calculons :

$$\tan(t_n) = \tan\left(z_n + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{\tan(z_n) + \tan(\frac{1}{n\pi})}{1 - \tan(z_n)\tan(\frac{1}{n\pi})}$$

   Or $1 - \tan(z_n)\tan(\frac{1}{n\pi}) \to 1$, donc $1 - \tan(z_n)\tan(\frac{1}{n\pi}) \sim 1$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\tan(z_n) + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= -\frac{1}{x_n} + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} + \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n^2}) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\tan(t_n) = \frac{\tan(z_n) + \tan(\frac{1}{n\pi})}{1 - \tan(z_n)\tan(\frac{1}{n\pi})} \sim \frac{1}{2n^2\pi}.$$

Comme enfin $\tan(t_n) \sim t_n$ car $t_n = o(1)$, on en déduit finalement que $t_n \sim \frac{1}{2n^2\pi}$, soit que $t_n - \frac{1}{2n^2\pi} = o\left(\frac{1}{2n^2\pi}\right)$. En conclusion :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2

1. La valuation d'un polynôme P non nul est le degré du monôme de plus bas degré de P. En terme de suites, c'est l'indice du premier coefficient non nul de P. Ainsi :

$$\mathrm{val}(X^2+1) = 0,\ \mathrm{val}(X^4+3X) = 1,\ \mathrm{val}(X^n) = n.$$

2. (i) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul de degré n. Alors $a_n \neq 0$ par définition du degré, et par définition de $\mathrm{val}(P)$, $\mathrm{val}(P) \leq n = \deg(P)$.

(ii) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Si $P = 0$, c'est immédiat. Sinon, notons $m = \mathrm{val}(P)$. Par définition :

$$a_m \neq 0 \ \text{ et pour tout } k \leq m-1,\ a_k = 0.$$

Mais alors pour tout $\lambda \neq 0$:

$$\lambda a_m \neq 0 \ \text{ et pour tout } k \leq m-1,\ \lambda a_k = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{val}(\lambda P) = m = \mathrm{val}(P)$.

(iii) Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X_k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell$. Si l'un de ces polynômes est nul, c'est immédiat. Sinon, notons $m = \mathrm{val}(P)$ et $n = \mathrm{val}(Q)$. Pour tout $k < \min(m,n)$:

$$a_k + b_k = 0 + 0 = 0$$

par définition de la valuation. Ainsi, $\mathrm{val}(P+Q) \geq \min(m,n) = \min(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$.

(iv) Soient encore $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X_k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell$. Si l'un de ces polynômes est nul, c'est immédiat. Sinon, notons $m = \mathrm{val}(P)$, $n = \mathrm{val}(Q)$, et $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$. Pour tout $k < m+n$, on obtient (quitte à prendre pour convention que $a_i = 0 = b_i$ lorsque $i < 0$) :

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{a_i}_{=0 \text{ car } i<m} b_{k-i} + \sum_{i=m}^{k} a_i \underbrace{b_{k-i}}_{=0 \text{ car } k-i<n} = 0.$$

Et pour $k = m+n$:

$$c_k = \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{a_i}_{=0 \text{ car } i<m} b_{k-i} + a_m b_n + \sum_{i=m+1}^{k} a_i \underbrace{b_{k-i}}_{=0 \text{ car } k-i<n} = a_m b_n \neq 0.$$

Ainsi, $\mathrm{val}(P \times Q) = m + n = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.
