DM8

Devoir maison à rendre le 18/02/2025

Exercice 1

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. Montrer que $x_n - n\pi \sim \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.
5. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2

On définit l'application valuation sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\mathrm{val}(P) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P = 0 \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k < n,\ a_k = 0\} & \text{si } P \neq 0 \end{cases}.$$

1. Calculer la valuation des polynômes $X^2 + 1$, $X^4 + 3X$, X^n.
2. Montrer que :

(i) si $P \neq 0$, $\mathrm{val}(P) \leq \deg(P)$;

(ii) $\mathrm{val}(\lambda \cdot P) = \mathrm{val}(P)$ pour tout $\lambda \neq 0$;

(iii) $\mathrm{val}(P+Q) \geq \min\{\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q)\}$;

(iv) $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.
