DM9

Devoir maison à rendre le 11/03/2025

Exercice 1 (Étude d'une suite récurrente)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ pour $x \geq 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note (u_n) la suite de réels tels que $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie I. Convergence de la suite (u_n)

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall x \geq 0,\ f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)^3}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq x$ avec égalité si, et seulement si, $x = 0$.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \dfrac{1}{4}$.
   (c) Vérifier que (u_n) est décroissante et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Partie II. Propriétés de la série harmonique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $a_n = h_n - \ln(n+1)$ et $b_n = h_n - \ln(n)$.

3. (a) Montrer que $h_{2n} - h_n \geq \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que $(h_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante qui diverge vers $+\infty$.
4. (a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes.
   (b) En déduire que (a_n) et (b_n) ont une limite commune, notée γ.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \gamma - a_n \leq \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. En déduire que a_{100} est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par défaut.
5. (a) Montrer que $h_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ et que $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   (b) Montrer que $h_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et que $h_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Partie III. Développement asymptotique de la suite (u_n)

6. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = u_n + 2$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{a} + 2n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq \frac{1}{n}$.
   (d) Justifier que, pour tout $n \geq 2$: $2n \leq \dfrac{1}{u_n} \leq 2n + \dfrac{1}{a} + a + h_{n-1}$.
   (e) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.
7. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq k_0$:

$$\frac{1-\varepsilon}{2k} \leq u_k \leq \frac{1+\varepsilon}{2k}.$$

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{2k}$, puis que $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n)$.

8. (a) Montrer que $\displaystyle\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 2n + \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n))$.

   (b) Montrer que $\displaystyle u_n = \frac{1}{2n} - \frac{\ln(n)}{8n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

Exercice 2 (Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass)

Partie I. Fonctions uniformément continues et théorème de Heine

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \eta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

1. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors elle est continue.

2. On suppose dans cette question que I est un segment $[a,b]$, avec $a < b$.

   On souhaite prouver que si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, alors elle est uniformément continue (*théorème de Heine*).

   On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas uniformément continue. Ainsi, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $(x,y) \in I^2$ vérifiant $|x-y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Dans la suite, on se fixe un tel $\varepsilon > 0$.

   (a) Justifier qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans I telles que

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

   (b) Prouver qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ et un réel $c \in I$ tels que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = c$.

   (c) Aboutir à une contradiction.

Partie II. Polynômes de Bernstein

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $B_{n,k} = \displaystyle\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \in \mathbb{R}[X]$.

3. Déterminer le degré de $B_{n,k}$, ses racines et leur multiplicité, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, et soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On souhaite prouver qu'il existe un unique $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k B_{n,k}$.

   (a) En utilisant les racines des $B_{n,k}$, justifier qu'un tel $(n+1)$-uplet, s'il existe, est unique.

   (b) À l'aide de l'identité $X^k = X^k(X + (1-X))^{n-k}$, prouver que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $X^k = \displaystyle\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} B_{n,j}$.

   (c) Conclure.

5. Prouver que pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} = nX$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} = n(n-1)X^2$.

6. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-nX)^2 B_{n,k} = nX(1-X)$.

Partie III. Approximation uniforme d'une fonction continue

Si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, on note $\|g\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$, qui est bien défini par le théorème des bornes atteintes.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \in \mathbb{R}_n[X]$.

On souhaite prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon$.
Dans toute la suite de cette partie, on considère $\varepsilon > 0$ fixé. Par le théorème de Heine, il existe donc $\eta > 0$ tel que : $\quad \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

7. Prouver que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) - [B_n(f)](x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x)$.

8. Soit $x \in [0,1]$ fixé et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A_x = \left\{k \in [\![0,n]\!], \left|x - \frac{k}{n}\right| < \eta\right\}$, et on note B_x le complémentaire de A_x dans $[\![0,n]\!]$.
   (a) Prouver que $\displaystyle\sum_{k\in A_x} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) < \varepsilon$.
   (b) Montrer que $\eta^2 \displaystyle\sum_{k\in B_x} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in B_x} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in B_x} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$.
   (d) En déduire que $\|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$.
   Conclure.

Ainsi, on a prouvé que pour toute fonction continue f sur $[0,1]$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale P telle que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. Ce qui signifie que les courbes représentatives de f et de P sont toujours à une distance inférieure à ε. C'est le théorème de Weierstrass, que vous reformulerez en seconde année en disant que les fonctions polynomiale sont denses (en un sens à préciser) dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
Le théorème se généralise sans difficultés au cas d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$.
