DS3

Correction du devoir surveillé

Exercice 1

1. Cette transformation est de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a = (1 + i\tan(\alpha))$ et $b = -i\tan(\alpha)$. C'est donc une similitude directe du plan complexe.

   - Si $a = 1$, ce qui équivaut à $\alpha = 0$, alors c'est une translation de vecteur d'affixe $b = -i\tan(\alpha) = 0$. Il s'agit donc de $\boxed{\text{l'application identité dans ce cas.}}$
   - Si $a \neq 1$, ce qui équivaut à $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors cette transformation admet un unique point fixe d'affixe ω satisfaisant :

   $$\omega = a\omega + b \Leftrightarrow \omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-i\tan(\alpha)}{-i\tan(\alpha)} = 1.$$

   De plus, $a = 1 + i\tan(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}e^{i\alpha}$ avec $\dfrac{1}{\cos(\alpha)} > 0$.

   Ainsi, la transformation géométrique considérée est une $\boxed{\text{similitude directe de centre } \Omega \text{ d'affixe 1, de rapport } \dfrac{1}{\cos(\alpha)} \text{ et d'angle de mesure } \alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[.}$

2. Calculons la première intégrale $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 7}$. On est dans le cas d'une fraction rationnelle de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(Q) = 2 < \deg(P) = 0$. De plus, Q est de discriminant négatif. On procède donc à une factorisation canonique du dénominateur :

   $$I = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x - 5/2)^2 - \frac{25}{4} + 7} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x - 5/2)^2 + \frac{3}{4}}.$$

   > **Rappel. Calcul de primitives à l'aide de la fonction arctan.**
   > Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$:
   > $$\int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

   On obtient ici :

   $$I = \left[\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x - 5/2)\right)\right]_1^3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(3 - 5/2)\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(1 - 5/2)\right)$$
   $$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\right)$$
   $$= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\boxed{= \frac{\pi}{\sqrt{3}}.}$$

   Calculons à présent $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^2 - 5x + 7}\mathrm{d}x$. On est dans le cas d'une fraction rationnelle de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(Q) = 2 < \deg(P) = 1$. On se ramène donc à une fraction de la forme $x \mapsto \dfrac{U'(x)}{U(x)}$ et d'une partie en « arctan » :

   $$J = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2 - 5x + 7}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x-5}{x^2 - 5x + 7}\mathrm{d}x + \frac{7}{2}\int_1^3 \frac{1}{x^2 - 5x + 7}\mathrm{d}x$$
   $$= \frac{1}{2}\left[\ln(|x^2 - 5x + 7|)\right]_1^3 + \frac{7}{2}I = \frac{1}{2}(\ln(1) - \ln(3)) + \frac{7}{2}\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$
   $$\boxed{= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{7\pi}{2\sqrt{3}}.}$$

3. Notons $I = \displaystyle\int_1^e \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$, et effectuons le changement de variable :

$$u = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^u \quad ; \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = e^u\,\mathrm{d}u$$

$$x : 1 \to e \quad ; \quad u : 0 \to 1.$$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant $\mathscr{C}^1$ sur $[1, e]$, le changement de variable est licite. On obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sin(u)e^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{Im}\left(\int_0^1 e^{(1+i)u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(1+i)u}}{1+i}\right]_0^1\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(1+i)}-1}{1+i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(e\cos(1)+ie\sin(1)-1)(1-i)}{2}\right) \\ &\boxed{= \frac{1}{2}(-e\cos(1)+1+e\sin(1)).} \end{aligned}$$

4. Commençons par la partie $A = \left\{\frac{n}{mn+1},\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$. Pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$0 < \frac{n}{mn+1} < \frac{nm+1}{nm+1} = 1.$$

Donc A est une partie bornée et non vide (contient par exemple 1/2) de $\mathbb{R}$. Par conséquent, elle admet une borne supérieure et une borne inférieure, et 0 et 1 sont respectivement des minorant et majorant de A.

Soit a un minorant de A. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$: $\quad a \leq \dfrac{1}{m \times 1 + 1} = \dfrac{1}{m+1}$.

En passant à la limite dans cette inégalité lorsque m tend vers $+\infty$ (tout converge bien), on obtient $a \leq 0$. Ainsi 0 est un minorant de A, et c'est le plus grand des minorants de A : c'est donc la borne inférieure de A, soit $\boxed{0 = \inf(A).}$

Soit à présent b un majorant de A. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \dfrac{n}{1 \times n + 1} = \dfrac{n}{n+1} \leq b$.

En passant à la limite dans cette inégalité lorsque n tend vers $+\infty$ (tout converge là aussi), on obtient $1 \leq b$. Ainsi 1 est un majorant de A, et c'est le plus petit des majorants de A : c'est la borne supérieure de A, soit $\boxed{1 = \sup(A).}$

Puisque 0 et 1 n'appartiennent pas à A (nous avions des inégalités strictes dans l'encadrement ci-dessus), A n'admet pas de maximum ni de minimum.

Étudions à présent le cas de la partie $B = \left\{\frac{n}{mn+1},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq \dfrac{n}{mn+1}$, donc 0 est un minorant de B, et est un élément de B puisque $0 = \dfrac{0}{0 \times 0 + 1}$. Par conséquent, B admet un plus petit élément, et donc aussi une borne inférieure, et $\boxed{0 = \min(B) = \inf(B).}$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = \dfrac{n}{n \times 0 + 1}$ et donc n appartient à B. Si B était majorée, il existerait un élément $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq M$. Ceci étant en contradiction avec la propriété d'Archimède satisfaite par l'ensemble des réels, B n'est donc pas majorée. $\boxed{\text{Elle n'admet donc pas de borne supérieure, pas plus que de maximum.}}$

Exercice 2 (Résolution d'une équation différentielle)

Partie I. Calculs préliminaires

1. Commençons par décomposer en éléments simples cette fraction rationnelle. Par le cours, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

On a $a = \left.\dfrac{1}{x^2+1}\right|_{x=0} = 1$. D'autre part, en substituant $-x$ à x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ -\frac{1}{x(x^2+1)} = -\frac{a}{x} + \frac{-bx+c}{x^2+1}, \quad \text{ce que se récrit} \quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx-c}{x^2+1}.$$

Par unicité dans la décomposition en éléments simples, on obtient $c = -c$, et donc $c = 0$. Enfin, en multipliant par x cette égalité, puis en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient :

$$0 = a + b, \quad \text{d'où} \quad b = -a = -1.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

$$\boxed{\text{Une primitive de } f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \text{ sur } I \text{ est } x \mapsto \ln(|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).}$$

2. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{(Dérivation)} & & \text{(Intégration)} \\ + & \boxed{\ln(x)} & & 1-x^2 \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{x} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \boxed{x-\dfrac{x^3}{3}} \end{array} \qquad \boxed{\text{fonctions } \mathscr{C}^1}$$

On obtient :

$$\int^x (1-t^2)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\ln(t)\right]^x - \int^x \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)\mathrm{d}t = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - \left[x - \frac{x^3}{9}\right]$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - x + \frac{x^3}{9}.$$

Ainsi $\boxed{\text{une primitive de } g \text{ sur } I \text{ est } x \mapsto \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9}.}$

3. Effectuons de nouveau une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{(Dérivation)} & & \text{(Intégration)} \\ + & \boxed{\ln(x)} & & x \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{1}{x} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \boxed{\dfrac{x^2}{2}} \end{array} \qquad \boxed{\text{fonctions } \mathscr{C}^1}$$

Par intégration parties :

$$\int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]^x - \int^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \left[\frac{x^2}{4}\right] = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}.$$

Ainsi $\boxed{\text{une primitive de } h \text{ sur } I \text{ est } x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}.}$

Partie II. Résolution de l'équation sans second membre

4. La fonction y_1 est deux fois dérivable sur I et pour $x \in I$:

$$y_1''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y_1'(x) + \frac{2}{1+x^2}y_1(x) = -\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

donc $\boxed{y_1 \text{ est solution de } (E_0) \text{ sur } I.}$

5. y est deux fois dérivable sur I, donc z est deux fois dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas sur I). Calculons pour tout $x \in I$:

$$y(x) = xz(x), \quad y'(x) = z(x) + xz'(x)$$
$$y''(x) = z'(x) + z'(x) + xz''(x) = 2z'(x) + xz''(x).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\Big(y \text{ est solution de } (E_0) \text{ sur } I\Big)\\
\iff &\Big(\forall x \in I,\ y''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{2}{1+x^2} = 0\Big)\\
\iff &\Big(\forall x \in I,\ (2z'(x) + xz''(x)) - \frac{2x}{1+x^2}(z(x) + xz'(x)) + \frac{2}{1+x^2}xz(x) = 0\Big)\\
\iff &\Big(\forall x \in I,\ xz''(x) + 2\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}z'(x) = 0\Big)\\
\iff &\Big(\forall x \in I,\ xz''(x) + \frac{2}{1+x^2}z'(x) = 0\\
\iff &\Big(z' \text{ est solution de } (E')\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{y \text{ est solution de } (E_0) \text{ si, et seulement si, } z' \text{ est solution de } (E') : xy' + \frac{2}{1+x^2}y = 0.}$

6. Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et A une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$, soit à l'aide de la question 1 :

$$\boxed{x \mapsto \lambda \exp(-2\ln x + \ln(1+x^2)) = \lambda\frac{1+x^2}{x^2} = \lambda\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

7. D'après les deux questions précédentes, y est solution de (E_0) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que z' soit de la forme $x \mapsto \lambda(1 - \frac{1}{x^2})$, ce qui équivaut à l'existence de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que z soit de la forme $x \mapsto \lambda x - \frac{\lambda}{x} + \mu$. Finalement, les solutions de (E_0) sur I sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \lambda(x^2 - 1) + \mu x \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

Partie III. Résolution de l'équation

8. (a) y_p est deux fois dérivable comme produit et somme de fonctions qui le sont, et pour $x \in I$:

$$\boxed{y_p'(x) = \lambda'(x)x + \lambda(x) + \mu'(x)(x^2-1) + 2x\mu(x) = \lambda(x) + 2x\mu(x)}$$

en utilisant la relation imposée sur λ' et μ'. Puis, pour tout $x \in I$:

$$\boxed{y_p''(x) = \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x).}$$

(b) y_p solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
(1+x^2)\ln(x) &= \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}(\lambda(x)+2x\mu(x)) + \frac{2}{1+x^2}(\lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)) \\
&= \lambda'(x) + 2x\mu'(x) + \lambda(x)\frac{-2x+2x}{1+x^2} + \mu(x)\frac{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}{1+x^2} \\
&= \boxed{\lambda'(x) + 2x\mu'(x).}
\end{aligned}$$

(c) Soit $x \in I$. Le couple $(\lambda'(x), \mu'(x)) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système $\begin{cases} x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0 \\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x \end{cases}$

En effectuant les opérations $L_1 \longleftrightarrow L_2$ puis $L_2 \to L_2 - xL_1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln(x) \\ -(x^2+1)\mu'(x) = -x(1+x^2)\ln(x) \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\mu'(x) = \frac{x(1+x^2)\ln(x)}{1+x^2} = x\ln(x)}$$

puis :

$$\boxed{\lambda'(x) = (1+x^2)\ln(x) - 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln(x) - 2x^2\ln(x) = (1-x^2)\ln x.}$$

À l'aide des questions 2 et 3, on peut prendre $\lambda : x \mapsto \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9}$ et $\mu : x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$. Une solution particulière de (E) sur I est donc :

$$\boxed{x \mapsto \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln(x) - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2(x^2-1)}{2}\ln(x) - \frac{x^2(x^2-1)}{4}.}$$

9. D'après ce qui précède, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln x - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2(x^2-1)}{2}\ln x - \frac{x^2(x^2-1)}{4} + \lambda(x^2-1) + \mu x \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 3 (Étude d'une équation fonctionnelle)

1. Puisque p est pair, considérons un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. Alors $\boxed{\text{l'application } f : n \mapsto n+k \text{ convient}}$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^2(n) = f(n+k) = (n+k)+k = n+2k = n+p.$$

2. L'application $\tau_p : n \mapsto n+p$ est clairement injective, et $f \circ f = \tau_p$, si bien que $\boxed{f \text{ est injective.}}$
   Supposons par l'absurde que f possède un point fixe $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors $f(n_0) = n_0$, et donc $f^2(n_0) = n_0$. Or $f^2(n_0) = n_0+p \neq n_0$, d'où une contradiction. Et donc $\boxed{f \text{ ne possède pas de point fixe.}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous savons déjà que $f^2(n) = n+p$. Donc $f^4(n) = f^2(f^2(n)) = f^2(n+p) = n+2p$. Prouvons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $f^{2k}(n) = n+kp$.

Init. Par hypothèse, la propriété est vraie au rang 1.

Hér. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{2k}(n) = n+kp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$f^{2(k+1)}(n) = f^2\left(f^{2k}(n)\right) = f^2(n+kp) = (n+kp)+p = n+(k+1)p.$$

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ f^{2k}(n) = n + kp.}$

4. Soit $k \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

   - Si k est pair, alors la question précédente prouve que $f^k(n) = n + \frac{k}{2}p \geq p$ car $\frac{k}{2} \geq 1$.
   - Si k est impair, alors $k \geq 3$, si bien que $k-1$ est un entier pair plus grand que 2 . Et donc $f^k(n) = f^{k-1}(f(n)) = f(n) + \frac{k-1}{2}p \geq p$.

   Dans tous les cas, on a bien prouvé que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^k(n) \geq p.}$

5. Supposons que $q \geq 1$. Alors $f(n) = pq + r = f^{2q}(r)$, d'où $n = f^{2q-1}(r)$ par injectivité de f, avec $2q-1 \geq 1$. Puisque $n < p$, la question précédente prouve qu'on ne peut pas avoir $2q-1 \geq 2$, si bien que $2q-1 = 1$, et donc $q = 1$. Et alors $n = f^{2q-1}(r)$ signifie bien que $\boxed{n = f(r).}$

6. Soit $n \in [\![0, p-1]\!]$. Deux cas sont possibles (avec les notations précédentes) :

   - si $f(n) \in [\![0, p-1]\!]$, n possède une image dans $[\![0, p-1]\!]$;
   - si $f(n) \notin [\![0, p-1]\!]$, alors $f(n) \geq p$, si bien que $q \geq 1$. Et donc $n = f(r)$, si bien que r est un antécédent de n par f qui se trouve dans $[\![0, p-1]\!]$.

   Donc f possède soit une image dans $[\![0, p-1]\!]$, soit un antécédent dans ce même ensemble. Et si n possède un antécédent s dans $[\![0, p-1]\!]$, alors $f(n) = f^2(s) = s + p \geq p$, si bien que $f(n)$ n'est pas dans $[\![0, p-1]\!]$.

   Donc $\boxed{n \text{ possède soit une image par } f \text{ dans } [\![0, p-1]\!], \text{ soit un antécédent par } f \text{ dans } [\![0, p-1]\!]}$, et $\boxed{\text{ces deux conditions sont mutuellement exclusives.}}$

7. Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence.

   - *Réflexivité.* Soit $a \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $a = a$, et donc $a \sim a$. Donc $\sim$ est réflexive.
   - *Symétrie.* Soient $a, b \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $a \sim b$. Si $a = b$, alors $b = a$ et donc $b \sim a$. Si $f(a) = b$, alors $b \sim a$. Et si $a = f(b)$, alors $b \sim a$. Donc est symétrique.
   - *Transitivité* Soient $a, b, c \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $a \sim b$ et $b \sim c$. Il est évident que si $a = b$ ou si $b = c$, alors $a \sim c$. Traitons donc le cas où $a \neq b$ et $b \neq c$. Par conséquent, il y a 4 cas possibles :
     - si $f(a) = b$ et $f(b) = c$: alors $c = f^2(a) = a + p \geq p$, ce qui n'est tout simplement pas possible puisque $c \in [\![0, p-1]\!]$.
     - si $f(a) = b$ et $b = f(c)$: alors par injectivité de $f, a = c$, si bien que $a \sim c$.
     - si $a = f(b)$ et $b = f(c)$: alors $a = f^2(c) \geq p$, donc ce cas n'est pas possible.
     - si $a = f(b)$ et $c = f(b)$: alors $a = c$, et donc $a \sim c$.

     Ainsi, $\sim$ est transitive.

   Donc $\boxed{\sim \text{ est bien une relation d'équivalence sur } [\![0, p-1]\!].}$

8. Soit $n \in [\![0, p-1]\!]$. Alors par définition de $\sim$, les éléments de sa classe d'équivalence, que l'on notera $\mathrm{cl}(n)$, sont soit n, soit l'image de n par f, soit antécédent de n par f. De plus, d'après la question 6, n possède soit une image par f dans $[\![0, n-1]\!]$, soit un antécédent par f dans $[\![0, p-1]\!]$.

   - Si $f(n) \in [\![0, p-1]\!]$, alors nous avons déjà dit que f n'a pas d'antécédent dans $[\![0, p-1]\!]$, et donc $\mathrm{cl}(n) = \{n, f(n)\}$, ces deux élément étant bien distincts puisque n n'est pas un point fixe de f, et donc $\mathrm{cl}(n)$ est de cardinal 2.
   - Si $f(n) \notin [\![0, p-1]\!]$, alors $n = f(r)$, où r est le reste de la division euclidienne de $f(n)$ par p. Et par injectivité de f, r est l'unique antécédent de n par f, si bien que $\mathrm{cl}(n) = \{n, r\}$. Mais encore une fois, f ne possédant pas de point fixe, $r \neq f(r) = n$, et donc $\mathrm{cl}(n)$ est de cardinal 2.

Donc $\boxed{\text{toute classe d'équivalence de est de cardinal 2.}}$

9. Nous savons que les classes d'équivalence de $\sim$ forment une partition de $[\![0, p-1]\!]$. Notons alors A l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de $\sim$, qui est un ensemble fini puisque $[\![0, p-1]\!]$ est fini. Alors $[\![0, p-1]\!] = \bigcup_{X \in A} X$. Les classes d'équivalence étant deux à deux disjointes :

$$p = \mathrm{Card}([\![0, p-1]\!]) = \sum_{X \in A} \mathrm{Card}(X) = \sum_{X \in A} 2 = 2\,\mathrm{Card}(A).$$

Et $\boxed{\text{donc } p \text{ est pair.}}$

Exercice 4 (Arithmétique de la suite de Fibonacci)

Dans tout le problème, on note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Partie I. Première propriétés de la suite de Fibonacci

1. On a $F_2 = F_0 + F_1 = 1, F_3 = F_1 + F_2 = 2$ et $F_4 = F_2 + F_3 = 3$.

   Prouvons alors par récurrence double sur $n \geq 2$, que $F_{n+1} > F_n$.

   Init. Nous venons donc de prouver que $F_3 > F_2$ et $F_4 > F_3$, donc la récurrence est initialisée.

   Hér. Soit $n \geq 2$ tel que $F_{n+1} > F_n$ et $F_{n+2} > F_{n+1}$. Alors :

$$F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+2} > F_n + F_{n+1} = F_{n+2}.$$

   Par le principe de récurrence, pour tout $n \geq 2$, $F_{n+1} > F_n$, et $\boxed{(F_n)_{n\geq 2} \text{ est strictement croissante.}}$

2. Une récurrence double permet de conclure rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} \geq n$.

   On peut aussi utiliser un résultat de cours sur les suites, au sujet des extractrices : si (u_n) est une suite strictement croissante d'entiers, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$. En effet, une récurrence double sans difficultés prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$. Puisque de plus, $(F_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, alors $F_{n+2} \geq n$ pour tout $n \geq 0$.

   Par théorème de comparaison, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

Partie II. Arithmétique de la suite de Fibonacci

3. (a) Prouvons le résultat par récurrence simple sur n.

   Init. Pour $n = 0$, on a $F_1^2 - F_0F_2 = 1 = (-1)^0$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$. Alors :

$$\begin{aligned} F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}\left(F_{n+2} + F_{n+1}\right) = F_{n+2}\left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

   Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u = (-1)^nF_{n+1}$ et $v = (-1)^{n+1}F_{n+2}$. Alors $F_{n+1}u + F_nv = 1$, de sorte que par le théorème de Bézout, $\boxed{F_n \text{ et } F_{n+1} \text{ sont premiers entre eux.}}$

4. (a) Prouvons le résultat par récurrence simple sur p, en prouvant la proposition $\mathscr{P}(p)$: « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$ ».

   Init. Pour $p = 0$, cette proposition est correcte puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n = F_{n-1} \times 0 + F_n \times 1 = F_{n-1}F_0 + F_nF_1.$$

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(p)$ soit vraie. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} F_{n+p+1} = F_{n+1+p} &= F_n F_p + F_{n+1} F_{p+1} = F_n F_p + F_n F_{p+1} + F_{n-1} F_{p+1} \\ &= F_{n-1} F_{p+1} + F_n \left(F_p + F_{p+1}\right) = F_{n-1} F_{p+1} F_n F_{p+2}. \end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{F_{n+p} = F_{n-1} F_p + F_n F_{p+1}.}$$

(b) Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, et notons $d = F_{n+p} \wedge F_n, \delta = F_n \wedge F_p$.

Par définition, $\delta \mid F_n$ et $\delta \mid F_p$, de sorte que $\delta \mid F_n F_{p+1} + F_p F_{n-1} = F_{n+p}$. Donc δ divise F_{n+p} et F_n, donc divise d.

Inversement, d divise F_{n+p} et F_p, donc divise $F_{n+p} - F_{n-1} F_p = F_n F_{p+1}$. Or d divise F_p, et F_p est premier avec F_{p+1}, donc d est premier avec F_{p+1}. Puisque $d \mid F_{p+1} F_n$ et $d \wedge F_{p+1} = 1$, par le lemme de Gauss, $d \mid F_n$. Et donc $d \mid F_n$ et $d \mid F_p$, de sorte que $d \mid \delta$.

Comme d et δ sont positifs, on a donc $d = \delta$, soit encore $\boxed{F_{n+p} \wedge F_p = F_n \wedge F_p.}$

(c) C'est une récurrence facile sur k :

$$F_{n+kp} \wedge F_p = F_{n+(k-1)p} \wedge F_p = F_{n+(k-2)p} \wedge F_p = \cdots \boxed{= F_n \wedge F_p.}$$

5. Soient n, p deux entiers tels que $n \geq p$. La question précédente prouve que si $n = bp + r$ est la division euclidienne de n par p, alors $F_n \wedge F_p = F_{n-bp} \wedge F_p = F_r \wedge F_p$.

   Supposons donc à présent, quitte à échanger n et p que $n \geq p$ et reprenons alors les notations utilisées dans le cours pour l'algorithme d'Euclide, avec r_2 le reste de la division euclidienne de n par p, r_3 le reste de la division euclidienne de p par r_2, etc, et $r_N = n \wedge p$ le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives. Alors :

$$F_n \wedge F_p = F_{r_0} \wedge F_{r_1} = F_{r_1} \wedge F_{r_2} = \cdots = F_{r_{N-1}} \wedge F_{r_N} = F_{r_N} \wedge F_0 = F_{r_N} \wedge 0 = F_{r_N} \boxed{= F_{n \wedge p}.}$$

   Si de plus $p \mid n$, alors $p \wedge n = p$. Et donc $F_n \wedge F_p = F_{n \wedge p} = F_p$. Par définition du PGCD, on a $\boxed{F_p \mid F_n.}$

6. Supposons que F_n soit un nombre premier, et soit p un facteur premier de n. Alors nous savons que $F_p \mid F_n$.

   Si $p > 2$, alors $F_p > F_2 = 1$, donc par primalité de F_n, $F_p = F_n$. Or la suite de Fibonacci étant strictement croissante à partir de 2, ceci signifie que $n = p$, et donc que n est premier.

   Supposons que n ne soit pas un nombre premier impair. D'après ce qui précède, n possède 2 comme unique facteur premier. Notons $k = v_2(n)$, de sorte que $n = 2^k$. Il est clair que $k = 0$ et $k = 1$ ne conviennent pas puisque F_1 et F_2 ne sont pas premiers.

   Si $k \geq 2$, alors 2^k est divisible par 4, et donc $F_4 = 5$ divise F_n. Mais F_n étant premier, on a alors $F_n = 5$, ce qui, toujours pas stricte croissance de $\left(F_n\right)_{n \geq 2}$, ne se produit que pour $n = 4$.

   Donc $\boxed{\text{si } F_n \text{ est premier, alors } n = 4 \text{ ou } n \text{ est premier impair.}}$

   Remarque. La réciproque est fausse : 5 est premier, mais $F_5 = 8$ ne l'est pas.

Partie III. Puissances de 2 dans la suite de Fibonacci

7. En calculant les premiers nombres de Fibonacci, on constate que $F_6 = 8$. Puisque $\left(F_n\right)_{n \geq 2}$ est strictement croissante, pour tout $n \geq 7$, $F_n > 8$. Donc il suffit de lister les puissances de 2 parmi $F_0, F_1, \ldots, F_6$: $\boxed{\text{il y en a quatre, à savoir } F_1 = F_2 = 1, F_3 = 2 \text{ et } F_6 = 8.}$

8. (a) Si $F_n = 2^k$ avec $k > 3$, alors F_n est divisible par 8, et donc $F_n \wedge 8 = 8$, soit encore $F_n \wedge F_6 = F_6$. Par la question 5, cela signifie donc que $F_{n\wedge 6} = F_6$, et donc (par stricte croissance de la suite (F_n)) que $n \wedge 6 = 6$.

   Ainsi, $\boxed{n \text{ est divisible par 6 : il existe } m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = 6m.}$ Notons qu'alors $m \geq 2$ puisque n est nécessairement supérieur ou égal à 7 par la question précédente.

   (b) Puisque $F_m \mid F_{6m} = F_n$ qui est une puissance de 2, $\boxed{F_m \text{ est également une puissance de 2}}$ (distincte de 1 car $m \geq 2$).

   On a alors $F_{3\wedge m} = F_3 \wedge F_m = 2 \wedge F_m = 2$. Mais le seul terme de la suite de Fibonacci égal à 2 est F_3, donc $3 \wedge m = 3$, si bien que $\boxed{3 \mid m.}$

   (c) Puisque $n = 6m$ et que 3 divise m, alors $9 \mid n$, et par conséquent, $F_9 \mid F_n$. Mais $F_9 = 34$ ne divise pas F_n, car 17 est premier avec $F_n = 2^k$.

   $\boxed{\text{Il n'existe donc pas de valeur de } n \text{ pour laquelle } F_n \text{ est de la forme } 2^k \text{ avec } k > 3.}$

9. La liste a été donnée à la question 7 : les seules puissances de 2 dans la suite de Fibonacci sont 1,2 et 8, égaux respectivement à $\boxed{F_1,\ F_2,\ F_3 \text{ et } F_6.}$
