DS4

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3 à coefficients constants)

1. (a) Les relations $\begin{cases} u_{n+3} = & 2u_{n+2} & -\dfrac{5}{4}u_{n+1} & +\dfrac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} = & u_{n+2} & & \\ u_{n+1} = & & u_{n+1} & \end{cases}$ s'écrivent matriciellement sous la forme $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$ puisque $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A$.

   (b) On montre, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

   I La formule est vraie pour $n = 0$ car $A^0 = I_3$ et $X_0 = A^0 X_0$.

   H Soit n un entier naturel pour lequel $X_n = A^n X_0$. Alors :

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

   La propriété est donc encore vraie pour l'entier $n+1$.

   Par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 0,\ X_n = A^n X_0.}$

2. (a) On trouve $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \boxed{= 4I}$.

   On en déduit que $P \times \left(\frac{1}{4}Q\right) = \frac{1}{4}PQ = I_3$, ce qui montre que $\boxed{P \text{ est inversible, et } P^{-1} = \dfrac{1}{4}Q}$.

   (b) On trouve $PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$,

   et $AP = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$.

   Ainsi, $AP = PT$, et en multipliant cette égalité, membre à membre à droite par P^{-1}, on obtient $\boxed{A = PTP^{-1}}$.

   Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

   I Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

   H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PT^nP^{-1}$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = \left(PT^nP^{-1}\right)\left(PTP^{-1}\right) = PT^n\left(P^{-1}P\right)TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

   car $P^{-1}P = I_3$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$

Par principe de récurrence, $\boxed{A^n = PT^nP^{-1} \text{ entier } n \geq 0}$.

3. (a) Calculons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $\boxed{N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3 \text{ pour tout entier } k \geq 2}$.

(b) On trouve $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$.

De $N = T - D$, on déduit $T = D + N$. Puisque D et N **commutent**, la formule du binôme donne, pour tout entier $n \geq 2$:

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k = \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1}N = D^n + nD^{n-1}N.$$

car $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$.

D étant diagonale, $D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $D^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $D^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il vient :

$$\begin{aligned} T^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. Et cette égalité est encore satisfaite lorsque $n = 0$ et $n = 1$.

(c) Calculons

$$PT^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

puis :

$$A^n = PT^nP^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où $\boxed{A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 & \frac{3}{2}n - 4\times 2^n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4\times 2^n - 2n - 4 & 3n - 4\times 2^n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4\times 2^n - 4n - 4 & 6n - 4\times 2^n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n est le dernier coefficient du vecteur-colonne $X_n = A^n X_0$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 \\ 4\times 2^n - 2n - 4 \\ 4\times 2^n - 4n - 4 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4\times 2^n - 4n - 4) = 4 - \frac{4n}{2^n} - \frac{4}{2^n}.}$$

(b) Par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. D'où : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4.}$

Exercice 2 (Une équation fonctionnelle)

Partie I. Étude de $\mathscr{E}$.

1. La fonction cosinus est bien continue sur $\mathbb{R}$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + \cos(x-y) &= (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) \\ &= 2\cos(x)\cos(y) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\cos \text{ est bien dans l'ensemble } \mathscr{E}.}$

2. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) &= \frac{1}{4}\left((e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}\right) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \mathrm{ch}(x+y) \end{aligned}$$

Dès lors, en utilisant que ch est paire et sh impaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) \\ &= 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y). \end{aligned}$$

Comme de plus ch est continue sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{ch appartient bien à } \mathscr{E}.}$

3. Soit f dans $\mathscr{E}$. Pour tout réel α, la fonction f_α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(\alpha x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues. De plus, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) &= f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) \\ &= 2f(\alpha x)f(\alpha y) \quad \text{car } f \in \mathscr{E} \\ &= 2f_\alpha(x)f_\alpha(y). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f_\alpha \text{ est dans } \mathscr{E}.}$

Remarque. On en déduit par exemple que $x \mapsto \cos(\omega x)$ est dans $\mathscr{E}$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

4. Soit $f \in \mathscr{E}$.

 (a) Prenons $x = y = 0$, on obtient :

$$f(0) + f(0) = 2f(0)^2, \quad \text{d'où} \quad f(0)(f(0) - 1) = 0.$$

 Ainsi $\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1}$ (par intégrité de $\mathbb{R}$).

 (b) Supposons que $f(0) = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2f(x) = f(x+0) + f(x-0) = 2f(x)f(0) = 0.$$

 Donc $\boxed{f \text{ est la fonction identiquement nulle.}}$

 (c) Supposons $f(0) = 1$. Tout d'abord, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à l'origine. De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(y) + f(-y) = f(0+y) + f(0-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y).$$

 Ainsi, $f(-y) = f(y)$, et $\boxed{f \text{ est une fonction paire.}}$

Partie II. Détermination de $\mathscr{F}$.

5. (a) Par définition de $\mathscr{F}$, f n'est pas la fonction nulle. Par la partie I, on a donc $f(0) \neq 0$, et donc $f(0) = 1$.

 Toujours par définition de $\mathscr{F}$, f s'annule au moins une fois, disons en un réel α. Alors $\alpha \neq 0$. Si $\alpha > 0$, c'est bon. Si $\alpha < 0$, alors $-\alpha > 0$, et comme f est paire on a $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Ainsi, $\boxed{f(0) = 1 \text{ et } f \text{ s'annule au moins une fois sur } \mathbb{R}_+^*.}$

 (b) D'après la question précédente, E est une partie non vide. Elle est de plus minorée par 0 (par définition de E). $\boxed{\text{Elle admet donc une borne inférieure que l'on notera } a.}$

 (c) Par caractérisation de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in E$ tel que

$$a \leq u_\varepsilon \leq a + \varepsilon.$$

 Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ en prenant } \varepsilon = 1/n, \text{ il existe } u_n \in E \text{ tel que } a \leq u_n \leq a + \frac{1}{n}.}$

 (d) Tout d'abord, par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim u_n$ existe et vaut a. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$. Comme f est continue, on obtient par caractérisation séquentielle de la continuité :

$$0 = \lim f(u_n) = f(a).$$

 Ainsi, $\boxed{f(a) = 0. \text{ Et comme } a \geq 0 \text{ et que } f(0) = 1, \text{ on a bien } a > 0.}$

 (e) Par définition de la borne inférieure, pour tout $x \in]0, a[$, x n'appartient pas à E et donc $f(x) \neq 0$. De plus $f(0) = 1$, donc $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, a[$.

 Montrons à présent que $f(x) > 0$ sur $[0, a[$. Supposons qu'il existe $\alpha \in [0, a[$ tel que $f(\alpha) \leq 0$. Puisque $f(0) = 1$ et que f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires donnerait l'existence d'un réel β compris entre 0 et α, et donc dans $[0, a[$, tel que $f(\beta) = 0$. D'où une contradiction puisque f ne s'annule pas sur $[0, a[$. Ainsi, $\boxed{f(x) > 0 \text{ pour tout } x \in [0, a[.}$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière :

$$\left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor \leq \frac{2^n x}{a} < \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor + 1.$$

 D'où :

$$\frac{2^n x}{a} - 1 < \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor \leq \frac{2^n x}{a}$$

et donc (en notant que $a > 0$) :

$$x - \frac{a}{2^n} < y_n = a\frac{\left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor}{2^n} \leq x.$$

Puisque $\lim \left(x - \frac{a}{2^n}\right) = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\boxed{\lim y_n \text{ existe et vaut } x.}$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a construit à la question précédente une suite (y_n) d'éléments de D_a qui converge vers x. Donc $\boxed{D_a \text{ est une partie dense de } \mathbb{R}.}$

7. (a) i. Pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 = f\left(\frac{a}{2^{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}\right) + f\left(\frac{a}{2^{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}\right) = f\left(\frac{a}{2^q}\right) + f(0) \boxed{= f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1.}$$

ii. Tout d'abord, notons que g appartient bien à $\mathscr{E}$ d'après les questions 1 et 3.
Montrons par récurrence sur q la propriété $\mathscr{P}(q)$: « $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$ ».

$\boxed{\textbf{I}}$ Puisque $f(a) = 0 = g(a)$, la propriété est vraie pour $q = 0$.

$\boxed{\textbf{H}}$ soit $q \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang q. Alors :

$$\begin{aligned} 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 &= f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 \\ &= g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 \quad \text{par hyp. de réc.} \\ &= 2\left[g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 \quad \text{car } g \text{ appartient à } \mathscr{E}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 = \left[g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$, et donc $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = \pm g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$.
Comme enfin les fonctions f et g sont positives sur $[0, a[$, on obtient $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$, et la propriété au rang $q+1$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right).}$

iii. Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence double sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(p)$: « $f\left(p\frac{a}{2^q}\right) = g\left(p\frac{a}{2^q}\right)$ ».

$\boxed{\textbf{I}}$ La propriété au rang $p = 0$ est bien satisfaite puisque $f(0) = 1 = g(0)$. Pour $p = 1$, ça résulte directement de la question précédente dans laquelle on a montré que $f(\frac{a}{2^q}) = g(\frac{a}{2^q})$.

$\boxed{\textbf{H}}$ Soit $p \geq 1$. Supposons les propriétés $\mathscr{P}(p-1)$ et $\mathscr{P}(p)$ vraies. Calculons :

$$\begin{aligned} f\left((p+1)\frac{a}{2^q}\right) &= f\left(p\frac{a}{2^q} + \frac{a}{2^q}\right) = 2f\left(p\frac{a}{2^q}\right) f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(p\frac{a}{2^q} - \frac{a}{2^q}\right) \\ &= 2f\left(p\frac{a}{2^q}\right) f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left((p-1)\frac{a}{2^q}\right) \\ &= 2g\left(p\frac{a}{2^q}\right) g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left((p-1)\frac{a}{2^q}\right) \quad \text{par hyp. de réc.} \\ &= g\left((p+1)\frac{a}{2^q}\right) \quad \text{car } g \in \mathscr{E} \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $p+1$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } p, q \in \mathbb{N},\ f\left(p\frac{a}{2^q}\right) = g\left(p\frac{a}{2^q}\right).}$

(b) On a déjà montré l'égalité $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_a$ positif à la question précédente.
Soit $x \in D_a$, $x < 0$. Alors $-x > 0$ et $-x$ appartient à D_a. Ainsi :

$$f(-x) = g(-x), \quad \text{et donc} \quad f(x) = g(x)$$

car f et g sont paires.
Finalement, on obtient l'égalité $\boxed{f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in D_a.}$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors :

- d'après la question 6.(b), il existe une suite (y_n) d'éléments de D_a qui converge vers x ;
- par la question 7.(b), $f(y_n) = g(y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions f et g étant continues sur $\mathbb{R}$, on peut donc passer à la limite dans cette dernière égalité : par caractérisation séquentielle de la limite, $f(x) = g(x)$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{\text{les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont égales.}}$

Remarque. Le même argument montre que deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et qui coïncident sur une partie dense de $\mathbb{R}$ sont égales.

8. On a montré que si $f \in \mathscr{F}$, alors il existe $\omega > 0$ tel que $f(x) = \cos(\omega x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien dans $\mathscr{F}$ d'après les questions 1 et 3 (et car cos n'est pas la fonction nulle et s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$). Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{F} = \{x \mapsto \cos(\omega x),\, \omega > 0\}\,.}$$

Exercice 3 (Formule de Taylor-Lagrange et méthode de Newton)

Partie I : Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

1. (a) La fonction $t \mapsto f(c) + (t-c)f'(c) + \lambda(t-c)^2$ est deux fois dérivable sur $]a,b[$ car polynomiale, et f l'est par hypothèse. Par opérations sur les fonctions deux fois dérivables, $\boxed{\psi \text{ est deux fois dérivable sur }]a,b[.}$

Calculons, pour tout $t \in]a,b[$:

$$\boxed{\psi'(t) = f'(t) - f'(c) - 2\lambda(t-c) \quad \text{et} \quad \psi''(t) = f''(t) - 2\lambda.}$$

(b) On résout l'équation d'inconnue λ suivante :

$$\psi(x) = \psi(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) - (x-c)f'(c) - \lambda(x-c)^2 = 0$$
$$\underset{x \neq c}{\Leftrightarrow} \boxed{\lambda = \frac{1}{(x-c)^2}\left(f(x) - f(c) - (x-c)f'(c)\right)}$$

(c) On suppose avoir attribué à λ la valeur déterminée à la question précédente, de sorte que $\psi(x) = \psi(c)$. Puisque ψ est une fonction continue sur le segment délimité par x et c, dérivable sur l'intervalle ouvert délimité par x et c, on obtient par le théorème de Rolle l'existence d'un réel α strictement compris entre x et c, tel que $\psi'(\alpha) = 0$.

Puisque $\psi'(\alpha) = \psi'(c) = 0$, on peut à nouveau appliquer le théorème de Rolle entre α et c (ψ' étant bien continue et dérivable) : il existe un réel θ_x strictement compris entre α et c, et donc aussi entre x et c, tel que :

$$\psi''(\theta_x) = 0 = f''(\theta_x) - 2\lambda.$$

D'où :

$$\boxed{f(x) - f(c) - (x-c)f'(c) = \frac{(x-c)^2}{2} f''(\theta_x).}$$

Partie II : Méthode de Newton.

2. La fonction f est continue par hypothèse, strictement décroissante (car dérivable de dérivée strictement négative sur $[a,b]$) et telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Par le théorème de la bijection, $\boxed{\text{il existe un unique } c \in]a,b[\text{ tel que } f(c) = 0.}$

3. Soit $u \in [a, b]$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en u est :

$$y = f'(u)(x - u) + f(u).$$

L'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est solution de l'équation :

$$0 = f'(u)(x - u) + f(u) \underbrace{\Leftrightarrow}_{f'(u)\neq 0} \boxed{x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}.}$$

4. La fonction g est dérivable sur $[a, b]$ en tant que composées de fonctions qui le sont (puisque f est supposée $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$), et pour tout $x \in [a, b]$:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Puisque $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ par hypothèse, $g'(x)$ est donc du signe de $f(x)$, c'est-à-dire positive sur $[a, c]$ et négative sur $[c, b]$. Ainsi, $\boxed{g \text{ est croissante sur } [a, c], \text{ décroissante sur } [c, b].}$

Calculons $g(c) = c - \dfrac{f(c)}{f'(c)} = c$ et $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} > a$. Puisque de plus g est croissante sur $[a, c]$, $g([a, c]) \subset [a, c]$, et $\boxed{[a, c] \text{ est stable par } g.}$

5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini et appartient à $[a, c]$.

I Pour $n = 0$, x_0 est bien sûr bien défini. De plus, puisque $x_0 \in]a, b[$ est tel que $f(x_0) > 0$ et que f est strictement décroissante sur $[a, b]$ et $f(a) > 0 = f(c)$, x_0 appartient bien à $[a, c]$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que x_n est bien défini et appartient à $[a, c]$.

Puisque $x_n \in [a, c] \subset [a, b]$, x_n appartient au domaine de définition de g, en particulier $f'(x_n) \neq 0$. Donc $x_{n+1} = g(x_n)$ est bien défini, et appartient à $g([a, c]) \subset [a, c]$. D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est bien définie et à valeurs dans } [a, c].}$ En particulier, $\boxed{(x_n) \text{ est majorée par } c.}$

Étudions la monotonie de (x_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculons :

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$$

car x_n appartient à $[a, c]$ sur lequel f est positive. Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est croissante.}}$

Remarque. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque (x_n) est croissante, elle satisfait $a < x_0 \leq x_n \leq c < b$. En particulier, x_n appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$. Ça sera utile dans la suite.

6. La suite (x_n) est croissante et majorée par c. Par théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, puisque $a \leq x_n \leq c$ pour tout n, il suit que $\ell \in [a, c]$ par passage à la limite dans les inégalités.

D'autre part, $g(x_n) = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette égalité (en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, possible car g continue) :

$$g(\ell) = \ell, \quad \text{ce qui se récrit} \quad \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} = 0.$$

Ainsi, ℓ est un point d'annulation de f sur $[a, b]$. Or un tel point est unique d'après la question 2, et c'est c. Donc $\ell = c$, et $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers } c.}$

7. La fonction $t \mapsto |f'(t)|$ est continue sur le segment $[a,b]$ en tant que composée de fonctions qui le sont. Par le théorème des bornes atteintes, cette fonction est donc bornée et atteint ses bornes. Par conséquent, le réel $\boxed{m = \min_{t\in[a,b]} |f'(t)| \text{ est bien défini}}$, et il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $\boxed{m = |f'(t_0)| > 0}$ par hypothèse sur f'.

   De même, le réel $M = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$ est bien défini par le théorème des bornes atteintes appliqué à f'' continue.

   Si $M = 0$, alors $f''(t) = 0$ sur $[a,b]$. Par conséquent, f' est constante sur $[a,b]$, et f est une fonction affine $t \mapsto \lambda t + \mu$. Mais alors $0 = \lambda\alpha + \mu$, et $\alpha = -\dfrac{\mu}{\lambda}$ peut être calculé de manière exacte. Il n'est dans ce cas pas pertinent d'appliquer la méthode de Newton à une telle fonction. On suppose donc dans la suite que f n'est pas une fonction affine, et par conséquent que $M > 0$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq c$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[a,b]$, et x_n et c appartiennent à $]a,b[$ et sont distincts. En appliquant la question 1 entre x_n et c, on obtient l'existence d'un réel $\theta_n \in]x_n, c[$ tel que :

$$f(c) = f(x_n) + (c - x_n)f'(x_n) + \frac{(c-x_n)^2}{2} f''(\theta_n)$$

   ce qui se récrit, en notant que $f(c) = 0$:

$$\boxed{f(x_n) = (x_n - c)f'(x_n) - \frac{(c-x_n)^2}{2} f''(\theta_n).}$$

9. Puisque $f'(\theta_n) > 0$, on obtient à partir de l'égalité de la question précédente :

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x_n - c) - (c - x_n)^2 \frac{f''(\theta_n)}{2f'(x_n)}$$

   qui se récrit encore :

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - c = (c - x_n)^2 \frac{f''(\theta_n)}{2f'(x_n)}.$$

   Dès lors :

$$|x_{n+1} - c| = \left| x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - c \right| = (x_n - c)^2 \left| \frac{f''(\theta_n)}{2f'(x_n)} \right|$$

   D'où la majoration attendue (par définition de m et M) :

$$\boxed{|x_{n+1} - c| \leq \frac{M}{2m}(x_n - c)^2}.$$

   Notons enfin que cette majoration est valide pour tout $n \in \mathbb{N}$, même lorsque n tel que $x_n = c$, car alors $x_{n+1} = g(x_n) = c$ et l'inégalité est alors trivialement vérifiée.

10. Puisque $\lim |x_n - c| = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{n_0} - \ell| \leq \dfrac{m}{M}$ (on applique la définition de la convergence vers ℓ avec $\varepsilon = \dfrac{m}{M}$).

    Montrons alors par récurrence que pour tout $n \geq n_0$,

$$|x_n - c| \leq \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}.$$

    $\boxed{\mathbf{I}}$ Pour $n = n_0$:

$$|x_n - c| \leq \frac{m}{M} = \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^0}}.$$

    D'où la propriété au rang $n = n_0$.

$\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $n \geq n_0$. Supposons l'inégalité satisfaite au rang n. Alors, par la question précédente :

$$|x_{n+1} - c| \leq \frac{M}{2m}(x_n - c)^2$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$|x_{n+1} - c| \leq \frac{M}{2m}\frac{4m^2}{M^2}\frac{1}{\left(2^{2^{n-n_0}}\right)^2} = \frac{2m}{M}\frac{1}{2^{2^{n+1-n_0}}}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \geq n_0$,

$$\boxed{|x_n - c| \leq \frac{2m}{M}\frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}.}$$

11. Soit $q \in]0,1[$ et $n \geq n_0$. Quotientons l'inégalité de la question précédente par q^n :

$$\frac{|x_n - c|}{q^n} \leq \frac{2m}{M}\frac{1}{q^n 2^{2^{n-n_0}}}.$$

Or :

$$q^n 2^{2^{n-n_0}} = \exp\left(n\ln(q) + 2^{n-n_0}\ln(2)\right) = \exp\left(2^n\left(\frac{n}{2^n}\ln(q) + 2^{-n_0}\ln(2)\right)\right).$$

Par croissances comparées, $\lim \frac{n}{2^n}\ln(q) + 2^{-n_0}\ln(2) = 2^{-n_0}\ln(2) > 0$. D'où par caractérisation séquentielle de la limite :

$$q^n 2^{2^{n-n_0}} = \exp\left(2^n\left(\frac{n}{2^n}\ln(q) + 2^{-n_0}\ln(2)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par théorème d'encadrement, $\boxed{\text{la limite } \lim \frac{|x_n - c|}{q^n} \text{ existe et vaut } 0.}$

Remarque. La recherche d'une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ peut également se faire par dichotomie. La convergence est cependant bien plus lente : en effet, par dichotomie, on obtient une suite (a_n) telle que :

$$|a_n - \alpha| \leq \frac{|b-a|}{2^n}.$$

La convergence de (a_n) vers α est donc de l'ordre de $\frac{1}{2^n}$, et donc géométrique, bien moins rapide que par la méthode de Newton comme nous venons de le voir.

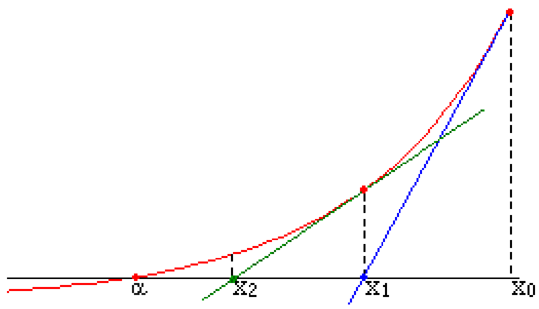

Illustration de la méthode de Newton.

Exercice 4 (Démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass)

Supposons que A soit un ensemble infini, et notons $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots$ ses éléments. Considérons la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ est un élément de A, et satisfait donc par définition :

$$\forall p \geq \varphi(n), u_p \leq u_{\varphi(n)}.$$

En particulier, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)$ et donc $u_{\varphi(n+1)} \leq u_{\varphi(n)}$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est donc décroissante, et minorée puisque (u_n) est bornée par hypothèse. Elle converge donc par le théorème de limite monotone.

Dans le cas où A est un ensemble fini, son complémentaire $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \geq n,\, u_p > u_n\}$ est lui infini. Considérons alors $\varphi(0) = \max(A) + 1$ (existe bien car A fini). Alors $\varphi(0)$ appartient à B. Par définition de B, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} > u_{\varphi(0)}$. Et comme $\varphi(1) > \max(A) + 1$, c'est un élément de B, de sorte qu'il existe $\varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $u_{\varphi(2)} > u_{\varphi(1)}$. En répétant cette procédure, on construit une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ extraite de (u_n) et strictement croissante. Comme elle est majorée, elle converge.

Dans tous les cas, on a trouvé une suite extraite de (u_n) qui converge. Ce qui prouve le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Remarque. Cette démonstration porte parfois le nom de « vue sur la mer ». On peut en effet se figurer les termes de la suite comme des hauteurs d'immeubles en front de mer (on suppose qu'il y a une infinité d'immeubles !) Quitte à ajouter une constante, on suppose que le minorant de ces hauteurs est strictement positif, le zéro étant le niveau de la mer. Les immeubles de catégorie A (c'est-à-dire ceux correspondants aux entiers appartenant à A) sont plus grands que tous ceux qui sont devant : ils ont *la vue sur la mer*. Ceux de catégorie B ont la vue bouchée par au moins un immeuble plus grand situé plus en avant. Ce petit habillage permet de mémoriser facilement la définition des ensembles A et B.

- S'il y a une infinité d'immeubles ayant la vue sur la mer, ils forment une suite de hauteurs décroissantes.

- Si au contraire il n'y en a qu'un nombre fini, à partir d'un certain rang tous les immeubles ont la vue bouchée. L'immeuble n_0 a la vue bouchée par l'immeuble n_1, qui a la vue bouchée par l'immeuble n_2, etc. On crée ainsi une suite d'immeubles de hauteurs croissantes.