DS4

Devoir surveillé du 01/02/2025

Durée : 3h30.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3 à coefficients constants)

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, soit X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire pour tout entier naturel n, la relation $X_n = A^n X_0$.
2. Soit P, Q et T les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.
   (b) Calculer les produits PT et AP. En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité $A^n = PT^nP^{-1}$.
3. Soit D la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.
   (a) Déterminer pour tout entier $k \geq 2$, la matrice N^k.
   (b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.
4. (a) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

(b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2 (Une équation fonctionnelle)

L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ suivants :

$$\mathscr{E} = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \right\}.$$

$\mathscr{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathscr{E}$ tels que :

- f n'est pas la fonction identiquement nulle ;
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Partie I. Étude de $\mathscr{E}$.

1. Montrer que la fonction cos est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.
2. Montrer la formule : $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$.
   En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.
3. Soit f dans $\mathscr{E}$. Montrer que pour tout réel α, la fonction $f_\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto f(\alpha x) \in \mathbb{R}$ est dans $\mathscr{E}$.
4. On fixe un élément $f \in \mathscr{E}$. Montrer que :
   (a) $f(0) = 0$ ou 1 ;
   (b) si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle ;
   (c) si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

Partie II. Détermination de $\mathscr{F}$.

Soit f un élément de $\mathscr{F}$. On pose $E = \{x > 0 \mid f(x) = 0\}$.

5. (a) Montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que E admet une borne inférieure que l'on notera a.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in E$ tel que $a \leq u_n \leq a + \dfrac{1}{n}$.
   (d) En déduire que $f(a) = 0$, puis que $a > 0$.
   (e) Montrer que pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) > 0$.
6. On considère l'ensemble $D_a = \left\{ a\dfrac{p}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ y_n = a\dfrac{\left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor}{2^n}$.
   Montrer que la suite (y_n) est convergente et déterminer sa limite.
   (b) En déduire que la partie D_a est dense dans $\mathbb{R}$.
7. On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$, et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(\omega x)$.
   (a) i. Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$.

ii. En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right).$$

iii. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $f\left(p\frac{a}{2^q}\right) = g\left(p\frac{a}{2^q}\right)$.

(b) Prouver que pour tout $x \in D_a$, $f(x) = g(x)$.

(c) En déduire que $f = g$.

8. En déduire tous les éléments de $\mathscr{F}$.

Exercice 3 (Formule de Taylor-Lagrange et méthode de Newton)

Partie I : Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un segment $[a, b]$, et soit $c \in]a, b[$.

1. Soit $x \in]a, b[$ fixé différent de c. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit une fonction ψ sur $[a, b]$ par :

$$\psi : t \mapsto f(t) - f(c) - (t - c)f'(c) - \lambda(t - c)^2.$$

(a) Justifier que ψ est deux fois dérivable sur $]a, b[$, et pour $t \in]a, b[$, calculer $\psi'(t)$ et $\psi''(t)$.

(b) Déterminer la valeur à donner à λ pour que $\psi(x) = \psi(c)$.

(c) En appliquant deux fois le théorème de Rolle, justifier qu'il existe θ_x compris strictement entre c et x tel que :

$$f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + \frac{(x - c)^2}{2} f''(\theta_x).$$

Partie II : Méthode de Newton.

Dans cette partie, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, telle que :

- $\forall x \in [a, b],\ f''(x) \geq 0,$
- $\forall x \in [a, b],\ f'(x) < 0,$
- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

2. Justifier qu'il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

3. Soit $u \in [a, b]$. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en u, et déterminer, en fonction de u, l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Le but de cette section est de présenter une méthode pour obtenir une valeur approchée de α. Cette méthode consiste, à partir d'une première approximation x_0 de α, à linéariser l'équation $f(x) = 0$ au voisinage de x_0, donc à remplacer f par sa tangente en x_0. Dans la suite, on introduit la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On considère $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > 0$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le premier terme est x_0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

4. Étudier les variations de g. En déduire que l'intervalle $[a, c]$ est stable par g, c'est-à-dire que $g([a, c]) \subset [a, c]$.

5. Prouver que la suite (x_n) est bien définie, croissante et majorée par c.

6. Montrer que (x_n) converge vers c.

7. Justifier que $m = \min\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)|$ est bien défini et strictement positif.

   On montre de même que $M = \max\limits_{t\in[a,b]} |f''(t)|$ est bien défini. Pourquoi peut-on raisonnablement supposer que $M > 0$?

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq c$, il existe θ_n strictement compris entre c et x_n tel que

$$f(x_n) = (x_n - c) f'(x_n) - \frac{(x_n - c)^2}{2} f''(\theta_n).$$

9. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - c| \leq \dfrac{M}{2m} (x_n - c)^2$.

10. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{n_0} - c| \leq \dfrac{m}{M}$ et prouver alors que pour tout $n \geq n_0$,

$$|x_n - c| \leq \frac{2m}{M} \frac{1}{2^{2^{n-n_0}}}.$$

11. Montrer alors que pour tout $q \in]0,1[$, $\dfrac{|x_n - c|}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

    Autrement dit, (x_n) converge vers c plus vite que toute suite géométrique, donc très rapidement !

Exercice 4 (Démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass)

*Cet exercice n'est à aborder que si vous estimez avoir **très bien** réussi tout le reste.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. En considérant l'ensemble :

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n,\, u_p \leq u_n\},$$

montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente.
On pourra distinguer les cas A infini et A fini.
