DS5

Devoir surveillé du 15/03/2025

Durée : 3h30.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Les différentes questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité de $x \mapsto \cos(x)^{\tan(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

2. Calculer le développement limité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ à l'ordre 2 en 0.

3. Déterminer la limite lorsque x tend vers 1 de $g(x) = \dfrac{\cos(2\pi x) - 1}{\ln(x) + 1 - x}$.

Exercice 2

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq \sqrt{n}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. (a) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} \leq \dfrac{1+x}{2}$.

   (b) En déduire que pour tout entier n, $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$, puis que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$.

   (c) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

   (d) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \sqrt{n}$.

   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   (b) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + o(1)$.

4. (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_{n-1})$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n - \sqrt{n} - \dfrac{1}{2}$.

   (a) Montrer que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + o(1)$.

   (b) En déduire que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8\sqrt{n}}$, et que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 3

On admettra dans la suite l'irrationalité de $\sqrt{7}$.
On note $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \left\{a + b\sqrt{7}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

Partie I. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

1. Prouver que pour tout élément x de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{7}$.

   L'élément $a - b\sqrt{7}$ est alors appelé le *conjugué de* x et noté $\overline{x}$.

2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, muni de l'addition et de la multiplication usuelles des réels est un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Est-ce un corps ?

3. Montrer que l'application $x \mapsto \overline{x}$ est un automorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

4. Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, on appelle *norme de* x et on note $N(x)$ le réel $x\overline{x}$.

   (a) Prouver que pour tout $(x, x') \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]^2$, $N(xx') = N(x)N(x')$.

   (b) En déduire qu'un élément $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ si, et seulement si, $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$. Exprimer alors cet inverse en fonction de $\overline{x}$.

Partie II. Structure du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ et équations de Pell-Fermat.

Dans la suite, on note G le groupe (multiplicatif) des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, c'est-à-dire $G = \mathscr{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{7}])$. Il est évident que 1 et -1 sont dans G.

5. Vérifier que $8 + 3\sqrt{7} \in G$, et en déduire que $G \neq \{-1, 1\}$.

6. On souhaite montrer que $G \cap]1, +\infty[$ possède un plus petit élément u.

   (a) Soit $x = (a + b\sqrt{7}) \in G \cap [1, +\infty[$ tel que $N(x) = 1$. Justifier que $0 < \overline{x} \leq x$, puis montrer que $a \geq 1$ et $b \geq 0$.

   (b) Montrer de manière analogue que si $x = (a + b\sqrt{7}) \in G \cap [1, +\infty[$ est tel que $N(x) = -1$, alors $a \geq 1$ et $b \geq 0$.

   (c) Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que $G \cap [1, M]$ est fini.

   (d) Conclure.

7. Soit $v \in G \cap]1, +\infty[$.

   (a) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k \leq v < u^{k+1}$.

   (b) Montrer que si k est comme dans la question précédente, alors $v = u^k$.

   (c) En déduire que $G \cap \mathbb{R}_+^* = \langle u \rangle = \left\{u^k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \{-1, 1\} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ (\varepsilon, k) & \longmapsto & \varepsilon u^k \end{array}$ est un isomorphisme de groupes, où $\{-1, 1\} \times \mathbb{Z}$ est muni de la structure de produit direct des deux groupes $(\{-1, 1\}, \times)$ et $(\mathbb{Z}, +)$.

9. **Équations de Pell-Fermat.**

   (a) Montrer que l'équation $x^2 - 7y^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ possède une infinité de solutions. Donner deux telles solutions avec $x, y \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En admettant que $8 + 3\sqrt{7}$ est le plus petit élément de $G \cap]1, +\infty[$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 7y^2 = -1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 4 (Polynômes de Tchebychev et théorème de Block-Thielmann)

On appelle *suite commutante* toute suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui satisfait :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(P_n) = n \\ \forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ P_n \circ P_m = P_m \circ P_n \end{cases}$$

où $\circ$ désigne la composition (des polynômes).

Partie I. Résultats préliminaires

1. Montrer que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est commutante.

2. (a) On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des polynômes de degré 1 de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $(\mathscr{G}, \circ)$ est un groupe. Que vaut l'inverse U^{-1} d'un polynôme $U = aX + b \in \mathscr{G}$ au sens de la composition ?

   (b) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite commutante, et soit $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1. Prouver que $(U \circ P_n \circ U^{-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est encore une suite commutante.

Partie II. Polynômes de Tchebychev (de première espèce)

On définit une famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

3. Calculer T_2, T_3 et T_4.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n et déterminer son coefficient dominant.

5. Prouver que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

6. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite commutante.

Partie III. Étude du commutant de $X^2 + p$

Soit $p \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\mathscr{C}_p$ l'ensemble des polynômes non constants de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P \circ \left(X^2 + p\right) = \left(X^2 + p\right) \circ P.$$

7. Montrer que tout élément de $\mathscr{C}_p$ est unitaire.

8. On souhaite prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{C}_p$ contient au plus un polynôme de degré n.

   Soient donc P_1, P_2 deux polynômes de degré n de $\mathscr{C}_p$.

   En considérant le polynôme $P_1 \circ (X^2 + p) - P_2 \circ (X^2 + p)$, prouver que $P_1 = P_2$.

9. Montrer que si $\mathscr{C}_p$ contient un polynôme de degré 3, alors $p = 0$ ou $p = -2$.

10. Prouver que $\mathscr{C}_0 = \{X^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

11. (a) Trouver un polynôme $V \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $V \circ (X^2 - 2) \circ V^{-1} = T_2$.
    (b) En déduire que $\mathscr{C}_{-2} = \{V^{-1} \circ T_n \circ V,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Partie IV. Théorème de Block-Thielmann

12. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2. On pose $U = aX + \dfrac{b}{2}$.

    Prouver que $U \circ P \circ U^{-1}$ est de la forme $X^2 + p$ pour un certain $p \in \mathbb{R}$.

13. Prouver enfin que les seules suites commutantes de $\mathbb{R}[X]$ sont les $(U \circ X^n \circ U^{-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et les $(U \circ T_n \circ U^{-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour U polynôme de degré 1.
