1

Relations d'ordre, Relations d'équivalence et ensembles de nombres classiques

<u>définition</u> Soit E un ensemble. On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur E la donnée d'une partie
$$\Gamma \subseteq E \times E \left(= \{(x,y) / x, y \in E\}\right).$$
On dira qu'un élément $x \in E$ est en relation avec un autre élément $y \in E$ si $(x,y) \in \Gamma$ (attention à l'ordre des facteurs !)

On notera alors $x \mathcal{R} y$.

1. Relation d'ordre

<u>définition</u> × Une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation binaire $\preccurlyeq$ sur E qui est :

(i) réflexive : $\forall x \in E, x \preccurlyeq x$

(ii) antisymétrique $\forall x, y \in E, (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq x) \Rightarrow x = y$

(iii) transitive : $\forall x, y, z \in E, (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq z) \Rightarrow x \preccurlyeq z$

× Le couple $(E, \preccurlyeq)$ est appelé ensemble ordonné.

× Deux éléments sont dit comparables si $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

× E est muni d'un ordre total $\preccurlyeq$ si tous les éléments de E sont comparables deux à deux. Sinon, $\preccurlyeq$ est dite relation d'ordre partielle

<u>exple</u> × $\mathcal{P}(E)$: ensemble des parties de E. Alors $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un ensemble ordonné. De plus $\subseteq$ est une relation d'ordre partielle.

× On admet ici l'existence de $\mathbb{N}$ (cf Complément de cours 1 pour une définition à partir des axiomes de Peano).

$(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Noter que $(\mathbb{N}, <)$ n'est pas un ensemble ordonné ($<$ n'est pas réflexive ni antisymétrique).

<u>déf</u> Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$.

(*) (iv) M est un plus grand élément de A si

$$\begin{cases} M \in A \\ \forall x \in A, \ x \leq M. \end{cases}$$
(en part, M est comparable avec x, $\forall x$)

(v) m est un plus petit élément de A si

$$\begin{cases} m \in A \\ \forall x \in A, \ m \leq x. \end{cases}$$

<u>prop</u> (Complément de cours!)

(i) Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

(ii) Toute partie non-vide et <u>majorée</u> de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

<u>prop</u> S'ils existent, les plus grands et plus petits éléments sont uniques. Ils sont alors noté $\max A$ et $\min A$ respectivement.

(*)

(i) M est un majorant de A si $\forall x \in A$, (M est comparable à x et $x \leq M$)

(ii) m est un minorant de A si $\forall x \in A$, (m est comparable à x et $m \leq x$.)

(iii) On dit que A est bornée si elle possède un majorant et un minorant.

②

2. Relations d'équivalence

2.1. Définition

<u>déf</u> × Une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation binaire R sur E qui est

(i) réflexive : $\forall x \in E,\ xRx$,

(ii) symétrique : $\forall x \in E, \forall y \in E,\ xRy \Rightarrow yRx$.

(iii) transitive : $\forall x, y, z \in E,\ (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$

× R une relation d'équivalence sur E. On appelle classe d'équivalence modulo R d'un élément $x \in E$ la partie de E donnée par :

$$\bar{x} = Cl_R(x) := \{ y \in E \,/\, xRy \} \in P(E).$$

× Les éléments de $Cl_R(x) \in P(E)$ sont appelés les représentants de la classe de x.

× On appelle ensemble quotient, l'ensemble de toutes les classe d'équivalence :

$$E/R = \{ Cl_R(x) \,/\, x \in E \} \subseteq P(E).$$

<u>prop</u> Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E, alors.

(i) $\bar{x} = \bar{y}$ ssi xRy.

(ii) L'ensemble E/R des classes d'équivalences constitue une partition de E, ie

(a) $\forall \bar{x} \in E/R,\ \bar{x} \neq \emptyset$

(b) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E/R,\ \bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

(c) $E = \bigcup_{\bar{x} \in E/R} \bar{x}$.

<u>expl</u> × Relation "être du même sexe" est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences sont celles des femmes et des hommes

× Relation "être de la même promo" est une relation d'équivalence sur l'ens des étudiants de l'URCA.

les classes d'équivalences sont paramétrées par le nom du chaque section.

2.2. Construction de $\mathbb{Z}$

On définit sur $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation R par :

$$\forall (n,p), (n',p') \in \mathbb{N}^2 : \quad (n,p) R (n',p') \iff n + p' = n' + p.$$

<u>prop</u> La relation R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$.

<u>définition</u> L'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/R$ est noté $\mathbb{Z}$ et ses éléments sont appelés les entiers relatifs.

<u>exple</u> × le couple $(1,4)$ définit l'entier relatif :

$$Cl_R((1,4)) = \{(0,3), (1,4), (2,5), \dots\} = \{(k, k+3) / k \in \mathbb{N}\}.$$

et le couple $(0,0)$ définit l'entier relatif

$$Cl_R((0,0)) = \{(k,k) / k \in \mathbb{N}\}$$

$(1,1)$ est un représentant de la classe $Cl_R((0,0))$

On montre que pour tout entier relatif $Cl_R((i,j))$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tq

$$Cl_R((i,j)) = Cl_R((m,0)) \quad \text{ou} \quad Cl_R((i,j)) = Cl_R((0,m))$$

On note respectivement

$$m := Cl_R((i,j)) \quad \text{ou} \quad -m = Cl_R((i,j)).$$

2.3. Construction de $\mathbb{Q}$:

On définit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la relation S donnée par :

$$(p,q) S (p',q') \iff pq' = p'q.$$

<u>prop</u> La relation S est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

③

déf L'ensemble quotient $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*/_S$ est noté $\mathbb{Q}$ et ses éléments sont appelés les nombres rationnels.
La classe d'équivalence d'un couple $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ pour la relation S se note : $\mathcal{C}l_S((p,q)) = \frac{p}{q}$

expl le couple d'entiers relatifs $(-1,5)$ définit le rationnel $\frac{-1}{5}$,
ie
$$\mathcal{C}l_S((-1,5)) = \{(-1,5), (-2,10), (-3,15), \dots\} = \{(-k, 5k)/k \in \mathbb{Z}^*\}$$
et les couples $(0,1)$ et $(1,1)$ définissent les rationnels :
$$\frac{0}{1} = \mathcal{C}l_S((0,1)) = \{(0,k)/k \in \mathbb{Z}^*\} \text{ et } \frac{1}{1} = \mathcal{C}l_S((1,1)) = \{(k,k)/k \in \mathbb{Z}^*\}$$

3. Le corps des réels $\mathbb{R}$:

3.1. Borne supérieure

déf × Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, A une partie non vide et majorée de E. On appelle borne supérieure de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A (quand il existe).

× B une partie non-vide et minorée de E. On appelle borne inférieure de B, notée $\inf(B)$, le plus grand des minorants de B (quand il existe).

Rem Si A est non-vide, majorée et admet un plus grand élément M, alors $\sup(A) = M$.

3.2. Définition axiomatique de $\mathbb{R}$, propriétés

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ qui vérifie :

(i) $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps totalement ordonné $\leq$.

(ii) $\mathbb{Q}$ sous-corps de $\mathbb{R}$.

(iii) Toute partie non-vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

<u>Rem</u> Deux constructions possibles de $\mathbb{R}$:

(i) Comme complété de $\mathbb{Q}$, cela utilise des suites de Cauchy (analyse) et une relation d'équivalence sur cet ens de suites.

(ii) Construction par les coupures de Dedekind (cf complément de cours 2)

<u>Thm</u> (caractérisation de la borne supérieure)

A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A. \\ \forall M' \text{ majorant de } A,\ M \leq M' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} M \text{ est un maj de } A. \\ \forall b < M,\ b \text{ n'est pas un majorant} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x > M - \varepsilon. \end{cases}$$

<u>exercice</u> Ecrire la caractérisation pour la borne inférieure.

④ <u>Exercice</u>

	min	inf	max	sup.
$\{1\}$	1	1	1	1
$[2,4]$	2	2	4	4
$]1,5[$	×	1	×	5
$[-5,0[$	-5	-5	×	0
$\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\}$	×	0	1	1
$\{x\in\mathbb{Q}, x^2\leq 2\}$	×	$-\sqrt{2}$	×	$\sqrt{2}$
$]2,4]\cap\mathbb{Q}$	×	2	4	4

<u>prop</u> $\mathbb{R}$ est archimédien, ie $\mathbb{R}$ satisfait la propriété :

$$\forall \varepsilon>0,\ \forall a\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N} : n\varepsilon \geq a.$$

<u>dém</u> Par l'absurde : supposons que $\exists \varepsilon>0, a\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}, n\varepsilon<a$.

~~Posons~~ $A=\{n\varepsilon, n\in\mathbb{N}\}$. A est $\neq\emptyset$ et majorée de $\mathbb{R}$, donc A admet une borne supérieure b.

Or, <u>$\forall n\in\mathbb{N}$</u>, $n+1\in\mathbb{N}$ et $(n+1)\varepsilon\in A$

$\Rightarrow (n+1)\varepsilon\leq b$

$\Rightarrow$ <u>$n\varepsilon\leq b-\varepsilon$</u>

↳ $b-\varepsilon$ est un majorant de A.

Or $b-\varepsilon<\sup(A)$ → contradiction.

<u>déf</u> On appelle partie entière d'un réel x, et on note $E(x)$ ($=\lfloor x\rfloor$) le plus grand entier inférieur ou égal à x.

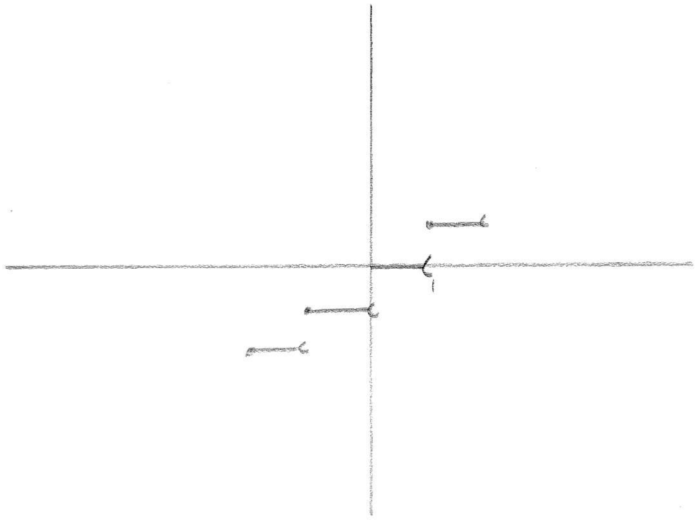
<u>caractérisation</u> Soit $(p,x)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$,

$$p=E(x)\Leftrightarrow p\leq x<p+1$$

<u>prop</u> (TD) Un tel entier existe et est unique.

Exple $E(1)=1$, $E(-\pi)=-4$ $E(-2)=-2$

$E(\pi)=3$, $E(\sqrt{3})=1$ $E(-\sqrt{3})=-2$.



prop (TD) Tout intervalle ouvert $]x,y[$ (avec $x<y$ dans $\mathbb{R}$).
contient au moins 1 rationnel et un irrationnel ($x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$)

déf On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.