DM1

Correction du Devoir maison

Exercice 1

Première partie :

1. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

   (a) Puisque $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Elle est de plus continue et dérivable sur cet intervalle comme composée de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4x(x^2+1)-(2x)(2x^2)}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{4x^3+4x-4x^3}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{4x-2x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^3+2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

   Puisque $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x)$ est du signe de son numérateur. On construit le tableau de variation de g.

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0		$-$		
g	0	$\nearrow$	$1-\ln(2)$		$\searrow$		$-\infty$

   On a $\frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$. D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 1$.
   D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$, donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$.
   Ainsi, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
   On peut compléter le tableau de variation avec les valeurs remarquables suivantes :

$$g(0) = 0 \quad ; \quad g(1) = 1-\ln(2) > 0.$$

   (b) La fonction g est continue sur $[1,+\infty[$ et strictement décroissante sur cet intervalle. Elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur l'intervalle $g([1,+\infty[) =]-\infty, 1-\ln(2)]$.
   Puisque $0 \in]-\infty, 1-\ln(2)]$, on en déduit qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $[1,+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.

   (c) Les réels $\frac{7}{4}$ et 2 sont dans l'intervalle $[1,+\infty[$, et on a :

$$g(7/4) \approx 0,11 \quad ; \quad g(2) \approx -0,009.$$

   Puisque g est décroissante sur $[1,+\infty[$, on en déduit que $7/4 < \alpha < 2$.

2. (a) L'équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 2 est donnée par l'équation :

$$y = g'(2)(x-2) + g(2) = -\frac{12}{25}(x-2) + \frac{8}{5} - \ln(5).$$

L'abscisse x_0 du point d'intersection de T et de $x'Ox$ est solution de l'équation :

$$0 = -\frac{12}{25}(x-2) + \frac{8}{5} - \ln(5).$$

On obtient après résolution :

$$x_0 = \frac{16}{3} - \frac{25}{12}\ln(5) \approx 1,98034...$$

On note ν_1 et ν_2 respectivement les valeurs approchées par défaut et par excès de x_0 à 10^{-3} près. On a donc :

$$\nu_1 = 1,980 \quad ; \quad \nu_2 = 1,981.$$

Après calcul, on a :

$$g(\nu_1) = 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ et } g(\nu_2) = -3,39 \cdot 10^{-4}.$$

Ainsi $g(\nu_1) > g(\alpha) > g(\nu_2)$. Et puisque g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, on obtient

$$1,980 < \alpha < 1,981.$$

(b) D'après le tableau de variation, on en déduit que $g(x) \geq 0$ pour $x \in [0, \alpha]$ et $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha, +\infty[$.

Deuxième partie :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \text{ si } x \neq 0,$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. f est bien définie sur $\mathbb{R}$, puisque pour $x \neq 0$, $x^2 + 1 > 0$ et donc $\frac{\ln(x^2+1)}{x}$ est bien définie.

   Montrons que f est dérivable en 0. Pour cela on doit déterminer la limite quand x tend vers 0 du taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

   On a $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ et $\lim_{X \to 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$ (limite à connaitre !), donc par composition on obtient que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = 1.$$

   Ainsi f est dérivable en 0, et $f'(0) = 1$.

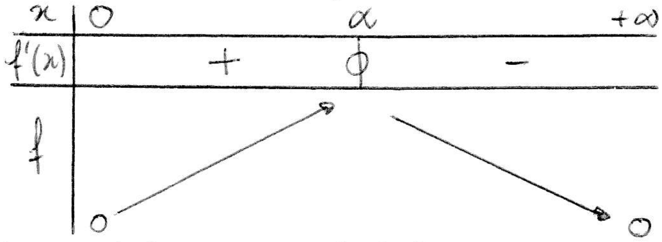
   On a vu que f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. On a de plus $f(-x) = -f(x)$ pour tout x réel. Donc f est impaire, et on restreint son domaine d'étude à $[0, +\infty[$.

   La fonction f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ comme composée de fonctions dérivables sur ces intervalles. On vient de voir que f est dérivable en 0, elle est donc en particulier continue en 0.

   Pour tout $x > 0$, on a en dérivant :

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1}x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

On dresse le tableau de variation de f.



Enfin on détermine la limite en $+\infty$ de f. On a :

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{\ln(x^2(1+\frac{1}{x^2}))}{x} = \frac{\ln(x^2)+\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 2\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}.$$

Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (limite à connaitre !) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=0$.

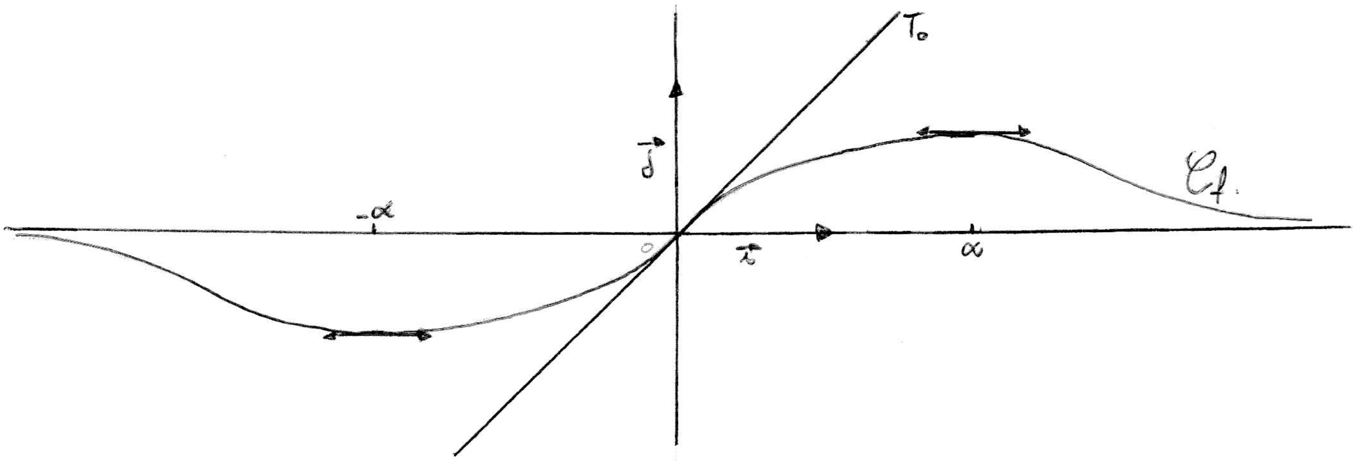
2. Montrons que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$. Pour cela on introduit la fonction $h(x) = x - \ln(x+1)$. Cette fonction est définie sur $]-1,+\infty[$ puisque $x+1>0$, et est dérivable sur cet intervalle comme composée de fonctions dérivables. On obtient en dérivant h : pour tout $x > -1$,
$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{1+x}$$
La dérivée h' est du signe de $-x$ puisque $x+1>0$, elle est donc positive sur $]-1,0]$, négative sur $[0,+\infty[$. La fonction h admet donc un maximum global en 0, avec $h(0)=0$.

De cette étude on en tire que $h(x) \leq 0$ pour tout $x > -1$, et donc que $\ln(x+1) \leq x$.

La tangente en 0 à $\mathcal{C}$ est donnée par :
$$y = f'(0)x + f(0) = x.$$
Pour déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et de sa tangente, on étudie le signe de la différence $f(x) - x$:
$$f(x) - x = \frac{\ln(x^2+1)}{x} - x = \frac{\ln(x^2+1)-x^2}{x}.$$
Or pour $x \in [0,+\infty[$, $x^2 \geq 0$ et on peut appliquer l'inégalité précédente :
$$\ln(x^2+1) - x^2 \leq 0.$$
Ainsi $f(x) - x \leq 0$ pour tout $x \geq 0$, et $\mathcal{C}$ est en dessous de sa tangente sur $[0,+\infty[$.

Par symétrie, on déduit de notre étude que $\mathcal{C}$ est également au dessus de sa tangente sur $]-\infty,0]$.

3. On peut maintenant tracer la courbe $\mathcal{C}$ (sans oublier la symétrie par rapport à 0).



Exercice 2
On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3}$.

a) Tout d'abord, on commence par factoriser f en cherchant les racines des polynômes au numérateur et au dénominateur. On obtient :

$$f(x) = -\frac{(x-2)(x-6)}{(x-1)(x-3)}.$$

La fonction f est bien définie lorsque le quotient a un sens, c'est à dire lorsque $x \neq 1, 3$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. De plus, f est dérivable sur les intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables. On obtient alors après simplification : pour tout $x \neq 1, 3$,

$$f'(x) = -2\frac{2x^2-9x+12}{(x-1)^2(x-3)^2}.$$

Or le discriminant du polynôme au numérateur est strictement négatif. Donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \neq 1, 3$. Ainsi f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

On détermine les limites de f aux bords de son ensemble de définition. On a

$$\frac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3} = \frac{-1+\frac{8}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

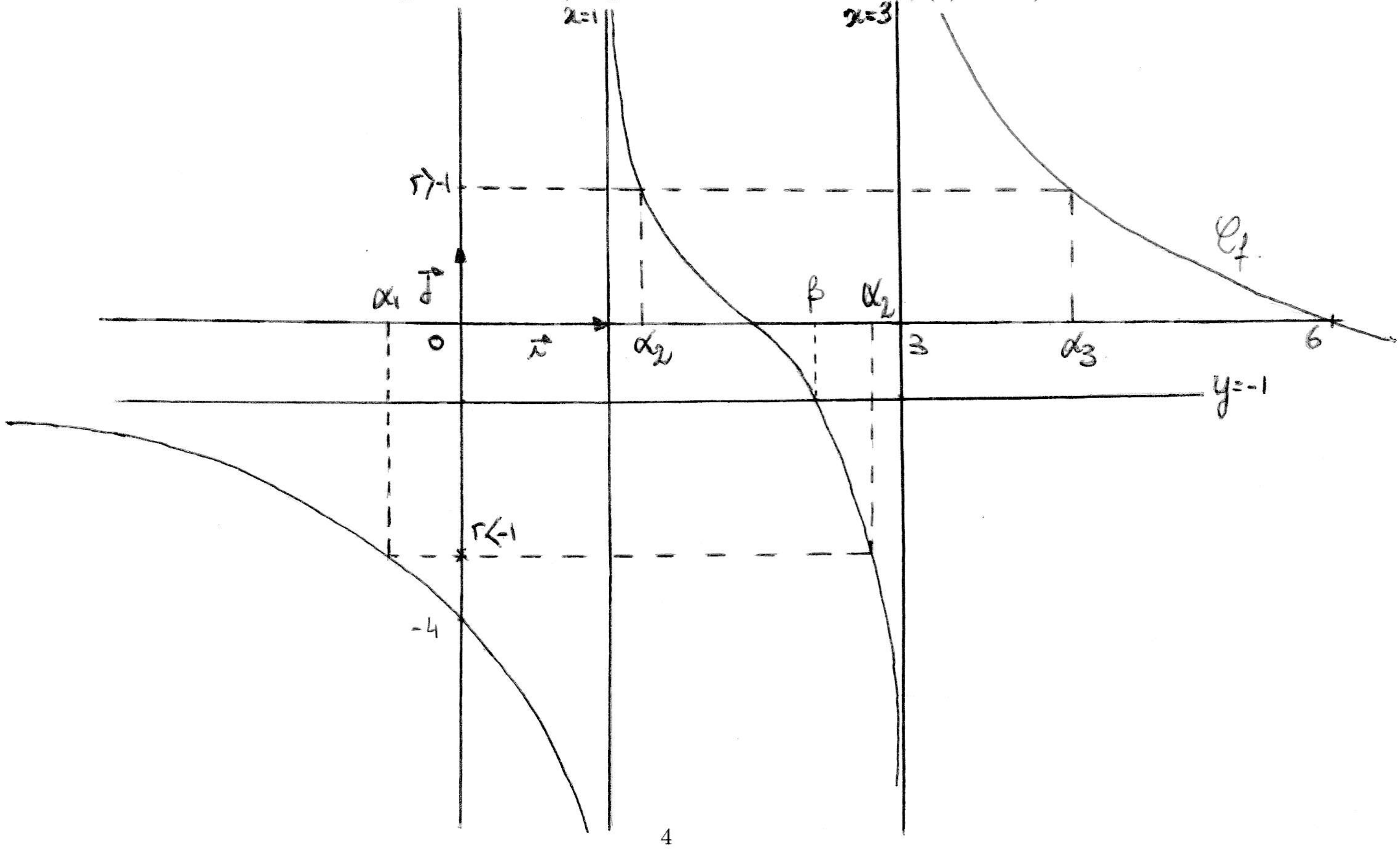
D'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$.

On obtient les limites en 1 et en 3 grâce à l'expression factorisée de f :

$$f(x) = -\frac{(x-2)(x-6)}{(x-1)(x-3)}.$$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$.

On construit sa courbe représentative (on pourra utiliser la valeur $f(0) = -4$).



b) Pour tout nombre réel r, on considère l'ensemble $f^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = r\}$.

Remarque. $f^{-1}(\{r\})$ s'appelle l'image réciproque de l'ensemble $\{r\}$ par la fonction f. Il s'agit de l'ensemble des antécédents par f de r.

Par exemple, si f est la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$, alors :

$$f^{-1}(\{4\}) = \{2, -2\} \quad ; \quad f^{-1}(\{2\}) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \quad ; \quad f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \quad ; \quad f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset.$$

On fera attention à la notation f^{-1} : il ne s'agit pas ici de l'application réciproque de f. D'ailleurs f n'est pas supposée bijective ici (que ça soit la fonction carrée dans l'exemple, où la fonction f de l'exercice).

Montrons que cet ensemble contient en général deux éléments. Pour cela on va définir :

- f_1 la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1[$,
- f_2 la restriction de f à l'intervalle $]1, 3[$,
- f_3 la restriction de f à l'intervalle $]3, +\infty[$.

On a montré que f_1 est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$. Par le théorème de la bijection, f_1 réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ sur l'intervalle $f_1(]-\infty, 1[) =]-\infty, -1[$. On notera dans la suite f_1^{-1} sa bijection réciproque.

De même, on montre que :

- la fonction f_2 réalise une bijection de $]1, 3[$ sur l'intervalle $f_2(]1, 3[) =]-\infty, +\infty[$. On notera dans la suite f_2^{-1} sa bijection réciproque. ;
- la fonction f_3 réalise une bijection de $]3, +\infty[$ sur l'intervalle $f_3(]3, +\infty) =]+\infty, -1[$. On notera dans la suite f_3^{-1} sa bijection réciproque.

Soit $r \in \mathbb{R}$, on a trois cas possibles :

- soit $r > -1$: alors d'après ce qu'on a fait, les équations $f_2(x) = r$ et $f_3(x) = r$ admettent une unique solution chacune, respectivement $\alpha_2 = f_2^{-1}(r)$ et $\alpha_3 = f_3^{-1}(r)$, tandis que l'équation $f_1(x) = r$ n'a pas de solution. On a donc dans ce cas :
$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_2, \alpha_3\}.$$
Cet ensemble contient donc dans ce cas 2 éléments.
- soit $r < -1$: alors les équations $f_1(x) = r$ et $f_2(x) = r$ admettent une unique solution chacune, respectivement $\alpha_1 = f_1^{-1}(r)$ et $\alpha_2 = f_2^{-1}(r)$, tandis que l'équation $f_3(x) = r$ n'a pas de solution. On a donc dans ce cas :
$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_1, \alpha_2\}.$$
Cet ensemble contient encore 2 éléments.
- soit $r = -1$: alors d'après ce qu'on a fait, l'équation $f_2(x) = r$ admet une unique solution notée $\beta = f_2^{-1}(r)$, tandis que les équations $f_1(x) = r$ et $f_3(x) = r$ n'ont pas de solution. On a donc dans ce cas :
$$f^{-1}(\{r\}) = \{\beta\}.$$
Cet ensemble contient cette fois 1 seul élément.

c) On considère la fonction g définie par $g(x) = \max f^{-1}(\{f(x)\})$.

Le domaine de définition de g est le même que celui de f (en effet il faut et il suffit que $f(x)$ soit bien définie dans cette expression pour qu'elle ait un sens). On a donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

Posons $r = f(x)$. On a là aussi plusieurs cas à étudier :

- si $x < 1$, alors $r = f(x) < -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \{f_1^{-1}(r), f_2^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_1^{-1}(r) < f_2^{-1}(r)$, on obtient : $g(x) = f_2^{-1}(r) = f_2^{-1}(f(x))$.

- si $1 < x < \beta$, alors $r = f(x) > -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_2, \alpha_3\} = \{f_2^{-1}(r), f_3^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_2^{-1}(r) < f_3^{-1}(r)$, on obtient : $g(x) = f_3^{-1}(r) = f_3^{-1}(f(x))$.

- si $x = \beta$, alors $r = f(\beta) = -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\beta\}.$$

On obtient donc : $g(\beta) = \beta$.

- si $\beta < x < 3$, alors $r = f(x) < -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \{f_1^{-1}(r), f_2^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_1^{-1}(r) < f_2^{-1}(r)$, on obtient : $g(x) = f_2^{-1}(r) = f_2^{-1}(f(x)) = f_2^{-1}(f_2(x)) = x$.

- enfin si $x > 3$, alors $r = f(x) > -1$. Dans ce cas, on a vu que :

$$f^{-1}(\{r\}) = \{\alpha_2, \alpha_3\} = \{f_2^{-1}(r), f_3^{-1}(r)\}$$

et puisque $f_2^{-1}(r) < f_3^{-1}(r)$, on obtient : $g(x) = f_3^{-1}(r) = f_3^{-1}(f(x)) = f_3^{-1}(f_3(x)) = x$.

On peut alors construire l'allure de la courbe représentative de g.