DM1

Devoir maison à rendre le 14/09/15

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Première partie :

1. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

   (a) Etudier les variations de g, déterminer sa limite en $+\infty$.

   (b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

   (c) Prouver que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

2. On note Γ la courbe représentative de g. (On ne demande pas la construction de Γ).

   (a) Ecrire une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 2.
   Déterminer la valeur exacte de l'abscisse x_0 du point d'intersection de T et de $x'Ox$.
   On note ν_1 et ν_2 respectivement les valeurs approchées par défaut et par excès de x_0 à 10^{-3} près. Des signes de $g(\nu_1)$ et de $g(\nu_2)$, déduire un encadrement de α à 10^{-3} près.

   (b) Préciser le signe de g sur $\mathbb{R}_+$.

Deuxième partie :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que f est dérivable en 0. Etudier les variations de f et sa limite en $+\infty$.

2. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de sa tangente en 0.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3}$.

a) Etudier la fonction f, déterminer ses limite en $\pm\infty$ et construire sa courbe représentative.

b) Pour tout nombre réel r, on considère l'ensemble $f^{-1}(\{r\}) = [\{x \in \mathbb{R} / f(x) = r\}$.
Montrer qu'il contient en général deux éléments, et préciser les cas d'exception.

c) On considère la fonction g définie par $g(x) = \max f^{-1}(\{f(x)\})$.
Etudier la fonction g et construire sa courbe représentative.