TD24

Probabilités générales

Probabilités classiques

Exercice 1

Dix paires de chaussures sont toutes rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité:

1. d'obtenir deux paires de chaussures?
2. d'obtenir au moins une paire de chaussures?
3. d'obtenir une et une seule paire de chaussures?

Exercice 2

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants:

1. on tire deux boules simultanément,
2. on tire une boule, on ne la remet pas, puis on tire la seconde,
3. on tire une boule, on la remet, puis on tire la seconde.

Exercice 3

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré et en brassant bien. On cherche la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. On considère une classe de n élèves, avec $n \leq 365$. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour? (On suppose qu'aucun élève n'est né le 29 février.)

Exercice 4

Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : "le tirage est tricolore"
   (b) B : "parmi les boules tirées figurent exactement une noire et au moins une rouge"
   (c) C : "les trois boules tirées sont de la même couleur."
2. On suppose désormais que le tirage s'effectue successivement avec remise. Déterminer les probabilités des événements A, B et C définis ci-dessus.

Probabilités conditionnelles

Exercice 5

Une puce se déplace sur les sommets d'un carré $ABCD$. Elle commence au sommet A, et saute à chaque instant sur un sommet différent de celui où elle est, de façon équiprobable. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de l'événement E_n "la puce revient au sommet A pour la première fois à l'instant n".

Exercice 6
Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés, dont une et une seule convient. Il essaie au hasard les clés les unes après les autres. Soit $k \in [|1, n|]$. Calculer la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative (et pas avant).

Exercice 7
Deux joueurs J_1 et J_2 jouent aux dés avec deux dés non truqués. J_1 gagne si la somme des dés donne 6 et J_2 gagne si la somme des dés vaut 7.

1. Quelle est la probabilité pour que J_1 gagne au n-ième coup?
2. Calculer la probabilité p_n pour que J_1 gagne en moins de n coups.
3. Calculer la probabilité q_n pour que J_2 gagne en moins de n coups.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$. Interpréter.

Exercice 8
Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n.
- s'il est en passe à la date $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n

où (a, b) est un couple de réels de $]0, 1[$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement "l'appareil est en état de marche à la date n" et p_n la probabilité de M_n.

1. Déterminer p_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la limite de (p_n)

Exercice 9
Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A.

1. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
2. Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

Exercice 10
On dispose de N urnes, numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, et, sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche, sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules blanches ont été tirées ?
2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 11
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Soit $r \in [|2, n|]$. On tire avec remise r boules dans cette urne.

1. On considère l'événement:

   E_r:"Le numéro de la boule tirée au $r^{\text{ième}}$ tirage est inférieur ou égal à tous les précédents."

   Déterminer la probabilité de E_r.

2. Donner la valeur de cette probabilité en fonction de n pour $r = 2$.
3. Déterminer:
$$\lim_{n \to +\infty} P(E_r)$$

Exercice 12

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante: si à l'instant n il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit il y reste avec une probabilité de $2/3$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets.
Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), le mobile se trouve en A.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$ les événements A_n (resp. B_n, C_n):

"le mobile se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n"

et les probabilités $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. En déduire que:
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \text{ et } a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n).$$
4. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 13

On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 2 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$, 1 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$, indépendamment de ses congénères.
A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \frac{1}{8}$.

1. Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n-ième génération. Montrer que:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}.$$
3. Etudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers $-2 + \sqrt{5}$. Interpréter ce résultat.

Exercice 14

Deux joueurs s'affrontent lors d'une succession de parties de pile ou face. Ils possèdent initialement un montant a et b respectivement, et à chaque victoire le gagnant donne un euro au perdant. Le joueur A a une probabilité p de gagner à chaque lancer. Le jeu s'arrête lorsqu'un jouer n'a plus d'argent.
On pose $N = a + b$, et pour $n \in [|0, N|]$ on note p_n (respectivement q_n) la probabilité que le joueur 1 (respectivement 2) finisse ruiné s'il commence avec n euros.

1. Montrer que si $0 < a < N$, $p_a = pp_{a+1} + qp_{a-1}$.
2. En déduire l'expression de p_a.
3. Calculer de même q_a puis $p_a + q_a$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 15

On dispose d'une urne contenant n boules blanches, n boules noires et r boules rouges. On effectue des tirages dans cette urne.
Si l'on obtient une boule blanche, on gagne ; si l'on obtient une boule noire, on perd ; et si l'on obtient une boule rouge, on ne remet pas cette boule rouge dans l'urne et on effectue un nouveau tirage.
On note p_r la probabilité de gagner la partie.

1. Calculer p_0 et p_1.
2. Pour $r \in \mathbb{N}$, exprimer p_{r+1} en fonction de p_r.
3. En déduire que la suite $(p_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 16
Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test qui détecte 99% des malades, et qui donne $0,2\%$ de faux positifs chez une personne saine. Une personne est contrôlée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

Exercice 17
Un joueur joue à pile ou face avec deux pièces équilibrées de la manière suivante: il lance simultanément ces deux pièces; s'il n'obtient aucun pile, son gain et nul et la partie s'arrête. S'il obtient au moins un pile, il relance simultanément les deux pièces autant de fois qu'il a obtenu pile à la première phase du jeu et gagne autant d'unités que le nombre de piles obtenu lors de cette deuxième série de jets.

1. Déterminer la probabilité que son gain soit nul.
2. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu deux piles au premier jet sachant qu'il a obtenu un seul pile à la seconde étape.

Indépendance

Exercice 18
On lance n fois une pièce truquée, où la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au n-ième lancer ?

Exercice 19
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p, avec $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?

b) Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, face ne soit jamais suivi de pile ?

Exercice 20 (Indicatrice d'Euler)
Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$ un entier naturel non nul, décomposé en produit de facteurs premiers. On note $\phi(n)$ (et on appelle indicatrice d'Euler) le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. On se propose de montrer que :

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Soit $\Omega = [|1, n|]$, muni de la probabilité uniforme.

a) Si d est un diviseur de n, on note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω. Calculer $P(D_d)$.

b) Montrer que $D_{p_1}, \ldots, D_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

c) En déduire la formule pour $\phi(n)$.
