Ministère de l'éducation nationale

Session 2012

PE2-12-PG2
Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ECOLES

Mercredi 28 septembre 2011 – de 9h 00 à 13h 00

Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques et sciences expérimentales et technologie	**Durée : 4 heures** **Coefficient : 3** **Note éliminatoire : 0 à l'une ou l'autre des parties**

Le candidat doit traiter la partie sciences expérimentales et technologie sur une copie distincte de celle(s) utilisée(s) pour la partie mathématiques.

<u>Rappel de la notation</u> :
- première partie mathématiques : **12 points**
- seconde partie sciences expérimentales et technologie : **8 points**

Il est tenu compte, à hauteur de **trois points** maximum, de la qualité orthographique de la production des candidats.

Ce sujet contient 9 pages, numérotées de 1/9 à 9/9. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

EXERCICE 1 (3 points)

Dans cet exercice, 5 affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. Soient a et b deux nombres strictement positifs.
   Affirmation 1 : $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$.

2. Soit a un nombre strictement supérieur à 1.
   Affirmation 2 : Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a, $\frac{1}{2}(a^2-1)$ et $\frac{1}{2}(a^2+1)$, alors ce triangle est rectangle.

3. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
   Affirmation 3 : La probabilité d'obtenir pile à l'un des deux lancers et face à l'autre est $\frac{1}{3}$.

4. Un article a le même prix dans deux magasins A et B.
   Dans le magasin A, le prix de l'article subit successivement une baisse de 20% puis une hausse de 20%.
   Dans le magasin B, le prix de l'article subit successivement une hausse de 20% puis une baisse de 20%.
   Affirmation 4 : À la suite de ces modifications de prix, il est plus rentable d'acheter alors l'article dans le magasin A que dans le magasin B.

5. La longueur du côté d'un carré augmente de 5%.
   Affirmation 5 : le périmètre du carré augmente de 20% .

EXERCICE 2 (5 points)
On justifiera toutes les réponses.

On appelle « fraction égyptienne » toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre entier naturel non nul. Dans l'Egypte ancienne, on n'écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de sommes de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Par exemple, $\frac{25}{28}$ peut s'écrire $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$.

Le but du problème est de présenter quelques méthodes de décomposition de nombres rationnels en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Partie A : Exemples

1. Calculer la somme des six « fractions égyptiennes » $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$.

2. Décomposer $\frac{5}{8}$ en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes, dont les dénominateurs sont tous des puissances de 2.

Partie B : Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer a un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal au produit de deux nombres entiers naturels impairs p et q .

1. Démontrer la formule $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)} + \frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$
2. Justifier que les dénominateurs des fractions précédentes sont des nombres entiers naturels.
3. **En utilisant la formule établie à la question 1**), trouver deux décompositions différentes de $\frac{2}{15}$ en somme de « fractions égyptiennes » différentes.
4. Soit n un nombre entier naturel non nul. Donner une décomposition de la fraction $\frac{2}{2n+1}$ en somme de deux « fractions égyptiennes » différentes.

Partie C « Algorithme glouton » de Fibonacci

En 1201, Léonard de Pise (1175-1250), dit « Fibonacci », prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition :

« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne 0. »

1. Appliquer cet algorithme à $\frac{13}{81}$ et donner une décomposition de la fraction $\frac{13}{81}$ en somme de trois « fractions égyptiennes » toutes différentes.

2. Dans le papyrus Rhind (1650 av JC), exposé au *British Museum*, figure une des plus anciennes approximations du nombre π égale à $\frac{256}{81}$ (écriture moderne).

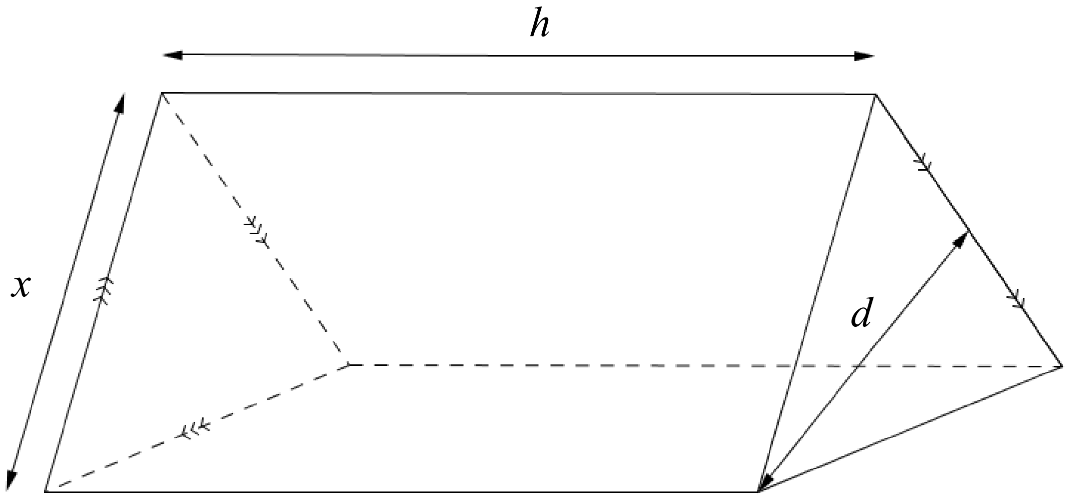
   a) Ecrire $\frac{256}{81}$ sous la forme d'une somme d'un entier naturel et d'une fraction comprise entre 0 et 1.

   b) Proposer une écriture de l'approximation de π donnée dans le papyrus Rhind sous forme d'une somme d'un nombre entier naturel et de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

EXERCICE 3 (4 points)

On justifiera toutes les réponses.

Un fabricant vend de la pâte d'amande dans un emballage cartonné ayant la forme d'un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral (voir la figure ci-dessous).



x est la longueur d'un côté de la base triangulaire.
d est la hauteur de cette base triangulaire.
h est la hauteur du prisme droit.

Dans tout l'exercice, on exprime les longueurs en cm, les aires en cm^2 et les volumes en cm^3.

Questions préalables

1. Représenter sur la copie un patron de l'emballage pour les valeurs $x = 3$cm et $h = 6$cm.

2. On désigne par A l'aire du triangle équilatéral de base. Montrer que $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

*Dans la suite du problème, les emballages ont un volume égal à **100 cm^3**.*

3. a) Donner l'expression de h en fonction de x.

   b) En déduire que l'aire S du patron de cet emballage, exprimée en cm^2, est donnée par la formule

$$S = \frac{400\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2.$$

4. On a construit une feuille de calcul, reproduite ci-après, donnant les valeurs de S en fonction des valeurs de x, ainsi que la représentation graphique de S en fonction de x.

   a) Donner une méthode permettant de remplir la colonne A (de la ligne 2 à 35) en utilisant la fonction de « recopie vers le bas ».

b) Donner une formule qui, entrée dans la cellule B2, puis recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne B (de B3 à B35).

Indication : pour calculer $\sqrt{3}$ dans le tableur, on fait appel à la commande : « racine(3) ».

Le fabricant souhaite minimiser la quantité de carton utilisée.

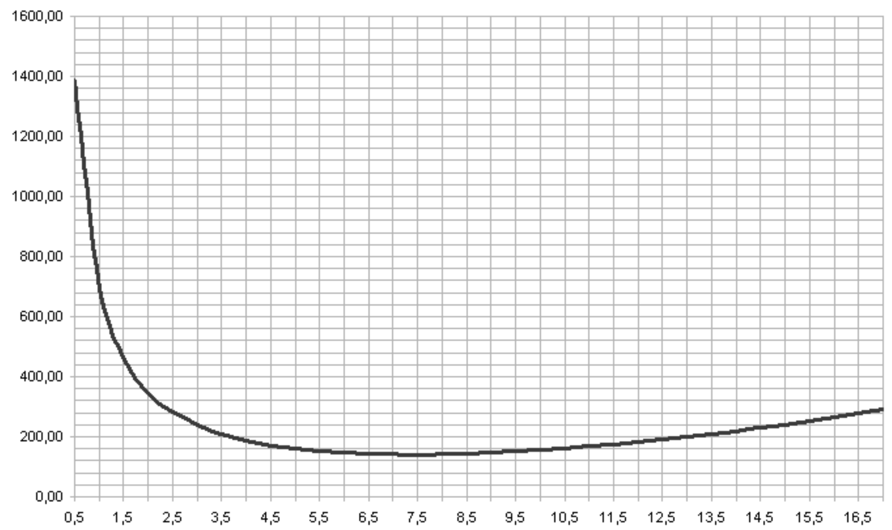
c) En utilisant les résultats de la feuille de calcul reproduite ci-après, donner à 0,5cm près la valeur de x qui minimise la quantité de carton utilisée pour l'emballage.

d) Calculer la hauteur de l'emballage pour cette valeur approchée de x.

FEUILLE DE CALCUL

	A	B
1	x	Aire S
2	0,5	1385,86
3	1	693,69
4	1,5	463,83
5	2	349,87
6	2,5	282,54
7	3	238,73
8	3,5	208,56
9	4	187,06
10	4,5	171,50
11	5	160,21
12	5,5	152,16
13	6	146,65
14	6,5	143,18
15	7	141,41
16	7,5	141,09
17	8	142,03
18	8,5	144,08
19	9	147,13
20	9,5	151,09
21	10	155,88
22	10,5	161,46
23	11	167,77
24	11,5	174,78
25	12	182,44
26	12,5	190,74
27	13	199,65
28	13,5	209,15
29	14	219,23
30	14,5	229,86
31	15	241,04
32	15,5	252,76
33	16	265,00
34	16,5	277,76
35	17	291,04

Aire S du patron de l'emballage en fonction de x



Seconde partie de l'épreuve

Le sujet comprend 3 documents A, B et C

Question 1 (2 points)

À l'aide du **document A**, indiquer les mécanismes retenus par Lamarck et Darwin comme étant à l'origine de l'évolution des espèces.

Question 2 (3 points)

Le terme reptiles (tortues, serpents et lézards, crocodiles) est utilisé dans le langage courant pour nommer ces animaux mais il ne l'est plus dans le cadre de la classification phylogénétique.

2.1. Donner le principe de la classification phylogénétique des organismes vivants.

2.2. À l'aide du **document B**, justifier le fait que le mot «reptiles » n'est pas utilisé dans cette classification.

Question 3 (3 points)

À partir du **document C**

3.1. Construire l'arbre phylogénétique des primates.

3.2. Identifier le plus proche parent de l'Homme et discuter l'expression longtemps employée : « l'Homme descend du singe ».

Document A : l'évolution des espèces

DocumentA1 : selon Lamarck

« PREMIÈRE LOI.

Dans tout animal qui n'a point dépassé le terme de ses développements, l'emploi plus fréquent et soutenu d'un organe quelconque fortifie peu à peu cet organe, le développe, l'agrandit et lui donne une puissance proportionnée à la durée de cet emploi ; tandis que le défaut constant d'usage de tel organe, l'affaiblit insensiblement, le détériore, diminue progressivement ses facultés, et finit par le faire disparaître.

DEUXIÈME LOI.

Tout ce que la nature a fait acquérir ou perdre aux individus par l'influence des circonstances où leur race se trouve depuis longtemps exposée et, par conséquent, par l'influence de l'emploi prédominant de tel organe ou par celle d'un défaut constant d'usage de telle partie, elle le conserve par la génération aux nouveaux individus qui en proviennent(…)

Relativement aux habitudes, il est curieux d'en observer le produit dans la forme particulière et la taille de la girafe (*camelopardalis*) : on sait que cet animal, le plus grand des mammifères, habite l'intérieur de l'Afrique et qu'il vit dans des lieux où la terre, presque toujours aride et sans herbage, l'oblige à brouter le feuillage des arbres et à s'efforcer continuellement de l'atteindre. Il est résulté de cette habitude, soutenue depuis longtemps, dans tous les individus de sa race, que ses jambes de devant sont devenues plus longues que celles de derrière et que son col s'est tellement allongé que la girafe, sans se dresser sur les jambes de derrière, élève sa tête et atteint jusqu'à six mètres de hauteur (près de vingt pieds). »

Jean-Baptiste de Lamarck, extraits de « Philosophie zoologique » (1809)

Document A2 : selon Darwin

La haute stature de la girafe, l'allongement de son cou, de ses membres antérieurs, de sa tête et de sa langue, en font un animal admirablement adapté pour brouter sur les branches élevées des arbres. Elle peut ainsi trouver des aliments placés hors de la portée des autres ongulés habitant le même pays ; ce qui doit, pendant les disettes, lui procurer de grands avantages (…)

De même, pour la girafe naissant à l'état sauvage, les individus les plus élevés et les plus capables de brouter un pouce ou deux plus haut que les autres ont souvent pu être conservés en temps de famine car ils ont dû parcourir tout le pays à la recherche d'aliments. On constate, dans beaucoup de traités d'histoire naturelle donnant les relevés de mesures exactes, que les individus d'une même espèce diffèrent souvent légèrement par les longueurs relatives de leurs diverses parties. Ces différences proportionnellement fort légères, dues aux lois de la croissance et de la variation, n'ont pas la moindre importance ou la moindre utilité chez la plupart des espèces. Mais si l'on tient compte des habitudes probables de la girafe naissante, cette dernière observation ne peut s'appliquer car les individus ayant une ou plusieurs parties plus allongées qu'à l'ordinaire ont dû en général survivre seuls. Leur croisement a produit des descendants qui ont hérité, soit des mêmes particularités corporelles, soit d'une tendance à varier dans la même direction ; tandis que les individus moins favorisés sous les mêmes rapports doivent avoir été plus exposés à périr.

Charles Darwin, extraits de « L'origine des espèces » (1859)

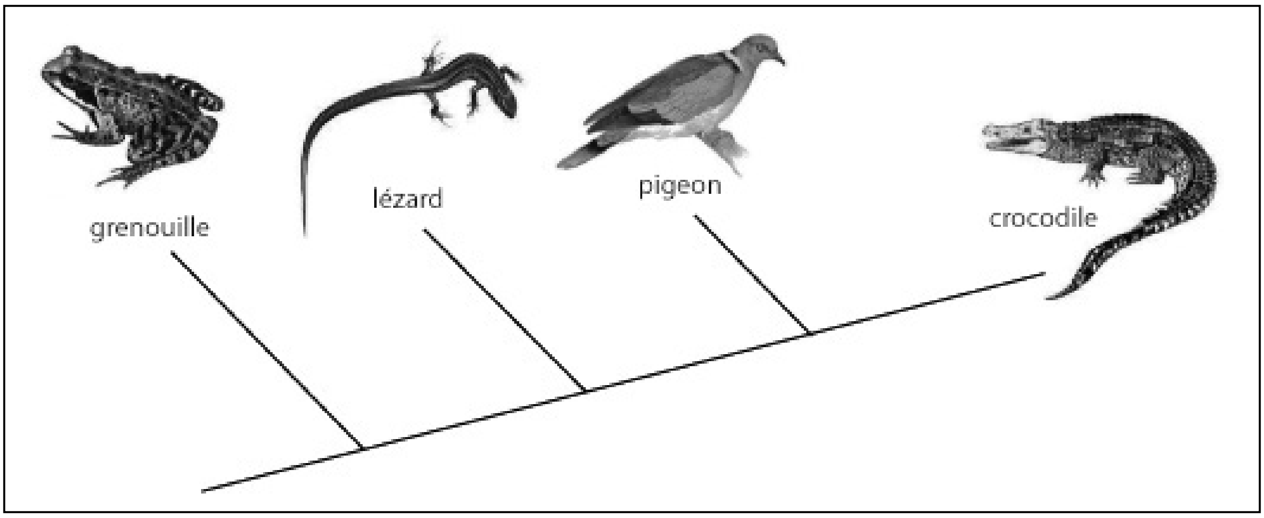
Document B : caractères et arbre phylogénétique

Document B1 : matrice de caractères

Caractère	Grenouille	Pigeon	Lézard	Crocodile
écailles	-	+	+	+
oviparité	+	+	+	+
membrane nictitante	-	+	-	+
gésier	-	+	-	+

\+ : présence du caractère - : absence du caractère

Document B2 : arbre phylogénétique de caractères



Document C : classification phylogénétique de primates

Document C1 : une classification en groupes emboîtés de primates

PRIMATES
ongles, pouces opposables

Exemple :
Tarsier

SINGES
narines rapprochées, orbites fermés

Exemple :
Macaque

SINGES SANS QUEUE
coccyx

Exemples :
Chimpanzé
Orang-outang
Homme
Gorille

Document C2 : pourcentage de différences entre certains fragments d'ADN comparables de quatre espèces de primates.

	Homme	Chimpanzé	Gorille	Orang-outan
Homme	0 %	1,45 %	1,51 %	2,98 %
Chimpanzé	1,45 %	0 %	1,57 %	2,94 %
Gorille	1,51 %	1,57 %	0 %	3,04 %
Orang-outan	2,98 %	2,94 %	3,04 %	0 %

D'après manuel SVT 3ème, Hatier, 2008