Devoir Maison 1 - À rendre le Mardi 5 Novembre

Exercice 1 *Démonstration du théorème de Thalès par les aires*
On considère un triangle ABC, N un point de $[AC]$ et M un point de $[AB]$ tels que (MN) soit parallèle à (BC). Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

1. Construire la figure à la règle et au compas. Expliquer la construction.
2. Soit I le point d'intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C. Après avoir calculé les aires $\mathcal{A}_{AMC}$ et $\mathcal{A}_{ABC}$ des triangles AMC et ABC, montrer que $\frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AM}{AB}$.
3. Soit J le point d'intersection de (AC) et de la perpendiculaire à (AC) passant par B. De la même façon que précédement, montrer que $\frac{\mathcal{A}_{ANB}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AN}{AC}$.
4. (a) Expliquer pourquoi les triangles BMC et BNC ont des aires égales.
   (b) Expliquer pourquoi les aires des triangles AMC et ANB sont elles aussi égales.
   (c) Que dire alors des quotients $\frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}}$ et $\frac{\mathcal{A}_{ANB}}{\mathcal{A}_{ABC}}$?
   (d) Conclure.

Exercice 2 On considère ABC un triangle isocèle en A et E le symétrique de B par rapport à A.

1. Construire la figure à la règle et au compas. Expliquer la construction.
2. Quelle est la nature du triangle BCE ? Justifier.
3. Montrer que $\widehat{EAC} = 2\widehat{ABC}$.
4. Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre C et tangent à la droite (EB) et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre E et tangent à la droite (BC). Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en F et G.
   (a) Construire F et G.
   (b) Quelle est la nature des triangles EFG et CGF ? Justifier.
   (c) Montrer que les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

Exercice 3 On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en O.

1. (a) Rappeler la définition des bissectrices d'un couple de droites sécantes.
   (b) Construire à la règle et au compas les bissectrices, notées Δ_1 et Δ_2, de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Expliquer la construction.
2. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R coupe $\mathcal{D}$ en deux points A et B et $\mathcal{D}'$ en C et D.
   (a) Que dire du quadrilatère $ACBD$? Justifier.
   (b) On note E, F, G, H les milieux des $[AC], [CB], [BD]$ et $[DA]$. Démontrer que le quadrilatère $EFGH$ est un losange.