① 

# Modules extrémaux pour les algèbres Toroïdales Quantiques

séminaire d'Algèbre
IHP - 08-04-2013.

Plan : 1. Algèbres affines quantiques $U_q(\widehat{sl}_{m+1})$.
2. Représentations extrémales de $U_q(\widehat{sl}_{m+1})$.
3. Algèbres toroïdales quantiques $U_q(sl_{m+1}^{tor})$.
4. Représentations $\ell$-extrémales de $U_q(sl_{m+1}^{tor})$.

But de l'exposé

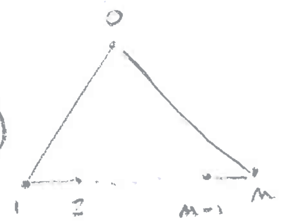
$$U_q(\widehat{sl}_{m+1}) \text{ algèbre affine quantique de type } A_m^{(1)} \xrightarrow{\text{procédé d'affinisation de Drinfeld}} U_q(sl_{m+1}^{tor}) \text{ algèbre toroïdale quantique associée.}$$

$U_q(\widehat{sl}_{m+1})$ — [Kashiwara - 94] → famille de représentations intégrables : Représentations extrémales.

$U_q(sl_{m+1}^{tor})$ — [Hernandez - 09] → définition de rep intégrables : Représentations $\ell$-extrémales

Dans cet exposé : construction de représentations $\ell$-extrémales pour $U_q(sl_{m+1}^{tor})$.

## 1. Algèbre affine quantique $U_q(\widehat{sl}_{m+1})$




$\widehat{sl}_{m+1}$ : algèbre de Lie affine de type $A_m^{(1)}$ sur $\mathbb{C}$ $(m \geq 2)$

$\mathfrak{h}$ : sous-alg de Cartan

$I = \{\text{sommets du diag de Dynkin}\} = \mathbb{Z}/(m+1)\mathbb{Z}$

$q \in \mathbb{C}^*$ non racine de l'unité.

Algèbre affine quantique $U_q(\widehat{sl}_{m+1})$

Présentation de Drinfel'd-Jimbo : $x_i^{\pm}, k_h$ $(i \in I, h \in \mathfrak{h})$ munie d'une structure d'Alg de Hopf.

Soit $V$ repr de $U_q(\widehat{sl}_{m+1})$. $V$ est intégrable si (i) $V = \bigoplus_{\nu \in P} V_\nu$ ($P$ : réseau des poids intégraux)

(ii) $x_i^{\pm}$ agit de façon localement nilpotente $\forall i \in I$.

Les représentations irréd intégrables de plus haut poids de $U_q(\widehat{sl}_{n+1})$ sont paramétrées par les poids dominants $P^+$ et notés $V(\lambda)$. $(\lambda \in P^+)$.

## 2. Représentations extrémales de $U_q(\widehat{sl}_{n+1})$ :

définition [K.-94] Soit $V$ une repr de $U_q(\widehat{sl}_{n+1})$ intégrable.

1) $u \in V_\lambda$ $(\lambda \in P)$ est dit $i$-extrémal si $x_i^+ u = 0$ ou $x_i^- u = 0$. On pose alors

$$S_i u = (x_i^-)^{(\lambda(\alpha_i^\vee))} . u \quad \text{ou} \quad (x_i^+)^{(-\lambda(\alpha_i^\vee))} u \quad \text{Resp.}$$

$\left(\text{avec } \alpha_i^\vee \text{ coracine, } (x_i^\pm)^{(k)} = \dfrac{x_i^{\pm k}}{[k]_q!}\right)$

2). $u$ est dit extrémal si $\forall l \geq 0$, $S_{i_1} \dots S_{i_l} u$ est $i$-extrémal pour tout $i, i_1, \dots, i_l \in I$

3) $\forall \lambda \in P$, $V(\lambda)$. Repr de $U_q(\widehat{sl}_{n+1})$ engendrée par un vect $u$ avec les relations définissant $u$ extrémal de poids $\lambda$.

Thm [K.-94] $V(\lambda)$ est intégrable et admet une base cristalline $\mathcal{B}(\lambda)$.

Rem Si $\lambda \in P^+$, $V(\lambda)$ repr irréd de plus haut poids $\lambda$.

↳ les repr extrémales généralisent la notion de module de plus haut poids.

Prenons $\lambda = \varpi_l = \Lambda_l - \Lambda_0$.

Thm [K-02]

(i) $V(\varpi_l)$ est irréductible.

(ii) Comme représentation sur $U_q(\widehat{sl}_{n+1})'$ (= alg affine quantique sans élément de dérivation), $V(\varpi_l)$ admet un quotient irréd de dim finie.

Motivation Kashiwara démontre de cette manière l'existence de bases cristallines pour les repr fondamentales de dim finies de $U_q(\widehat{sl}_{n+1})'$ (pour un paramètre spectral particulier).

② Réalisation monomial de $B(\varpi_\ell)$ $(1\leq \ell \leq n)$

Cristal monomial $\mathcal{M}$ sur $U_q(\hat{sl}_{n+1})$ [K-01, Nakajima 01]. $n = 2r+1$ impair

→ sommets : monômes en $e^\nu, Y_{i,q^s}$, $\nu \in P$, $i \in I$, $s \in \mathbb{Z}$.

→ action des opé de Kashiwara : inspirée de la théorie des q-caractères d'une alg affinisée quantique.

prop [HN-06] $M = e^{\varpi_\ell} Y_{\ell,1} Y^{-1}_{0,q^{d_\ell}}$ $(1 \leq \ell \leq n)$ avec $d_\ell = \min(\ell, n+1-\ell)$. Alors

$\mathcal{M}_\ell \simeq B(\varpi_\ell)$ $\mathcal{M}_\ell$ : sous-cristal de $\mathcal{M}$ engendré par $M$

expl $\mathcal{M}_2$ pour $U_q(\hat{sl}_4)$.

3. Algèbre toroïdale quantique $U_q(sl_{n+1}^{tor})$ (sans élément central).

$U_q(sl^{tor}_{n+1})$ = affinisation de Drinfeld de $U_q(\hat{sl}_{n+1})$

$$U_q(sl^{tor}_{n+1}) = \langle x^\pm_{i,r}, k_h, h_{i,m}, i \in I, h \in \mathfrak{h}, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, r \in \mathbb{Z} \rangle / \{\text{relations}\}$$

sous-algèbres :

- $U_q(\hat{\mathfrak{h}}) = \langle k_h, h_{i,m}, h \in \mathfrak{h}, i \in I, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\rangle$.
- sous-alg horizontale affine $U_q^h(sl^{tor}_{n+1}) = \langle x^\pm_{i,0}, k_h, i \in I, h \in \mathfrak{h}\rangle \simeq U_q(\hat{sl}_{n+1})$
- sous-alg verticales affines $U_q^{v,j}(sl^{tor}_{n+1}) = \langle x^\pm_{i,r}, k_h, h_{i,m}, i \neq j, h \in \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q}\alpha_i^\vee, r \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\rangle$

$$\forall j \in I, \quad U_q^{v,j}(sl^{tor}_{n+1}) \underset{[\text{Beck 94, D 88}]}{\simeq} U_q(\hat{sl}_{n+1})'$$

déf (i) $V$ une repr de $U_q(sl^{tor}_{n+1})$. $V$ est intég si $V$ est intégrable sur $U_q^h(sl^{tor}_{n+1})$.

(ii) $V$ est dit de plus haut $\ell$-poids si $\exists v \in V$ tq
- $V = U_q(sl^{tor}_{n+1}).v$
- $U_q(\hat{\mathfrak{h}}).v = \mathbb{C}v$.
- $x^+_{i,m}.v = 0 \quad \forall i, m$.

**Thm** [Miki 00 - N 01] Les repr irréd intégrables de plus haut $\ell$-poids sont paramétrées par $(\lambda, P_0, \dots, P_m) \in P^+ \times (1 + u\,\mathbb{C}[u])^I$. (polynômes de Drinfeld)

On utilise une paramétrisation légèrement différente par des monômes :

$$m = e^{\nu} \prod_{\substack{0 \leq i \leq m \\ a \in \mathbb{C}^*}} Y_{i,a}^{u_{i,a}} \qquad u_{i,a} \in \mathbb{N}$$

monômes dominants

$V(m)$ : repr irréd intég de plus haut $\ell$-poids $m$.

**Rem** [Chari-Pressley-91] Résultats analogues pour $\mathcal{U}_q(\hat{sl}_{m+1})'$. $\rightsquigarrow V_0(m)$.
De plus $\dim V_0(m) < +\infty$.

. $V$ une repr intégrable de $\mathcal{U}_q(sl_{m+1}^{tor})$, on a une décomposition en se de $\ell$-poids :

$$V = \bigoplus_{\gamma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}_q(h), \mathbb{C})} V_\gamma .$$

$V_\gamma$ sep généralisé, $\gamma$ $\ell$-poids de $V$.

**prop** [FR 99, H 05, N-01] Les $\ell$-poids de $V$ sont paramétrées par $(\lambda, (Q_0, R_0), \dots, (Q_m, R_m)) \in P \times (1 + u\mathbb{C}[u])^{2(m+1)}$.

On utilise une paramétrisation par des monômes :

$$m = e^{\nu} \prod_{\substack{0 \leq i \leq m \\ a \in \mathbb{C}^*}} Y_{i,a}^{u_{i,a}} \qquad u_{i,a} \in \mathbb{Z}.$$

$q$-caractère de $V$ : $\chi_q(V) = \sum_m \dim(V_m) \cdot m \in \mathbb{Z}[[e^{\nu}, Y_{i,a}^{\pm 1}]]$

## 4. Représentations $\ell$-extrêmales

**définition** [H-09] Une représentation $V$ de $\mathcal{U}_q(sl_{m+1}^{tor})$ $\ell$-extrêmal de $\ell$-poids $m$ est une repr intégrable tq $\exists v \in V_m$ satisfaisant :

(i) $V = \mathcal{U}_q(sl_{m+1}^{tor}) \cdot v$

(ii) $v$ est extrémal pour $\mathcal{U}_q^h(sl_{m+1}^{tor})$ (au sens de Kashiwara).

(iii) $\mathcal{U}_q^{v,j}(sl_{m+1}^{tor}) \cdot w$ est de dimension finie $\forall j$, $\forall w \in V$

expl Si $m$ dominant, $V(m)$ est $\ell$-extrémal.

## 4.1. Réalisations monomiales et représentations $\ell$-extrémales

On suppose que $n = 2r+1$ $(r \geq 1)$

But Construire une représentation $V$ de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}^{tor})$ tq.

$$\chi_q(V) = \sum_{m \in \mathcal{M}_\ell} m \qquad (*).$$

dont on espère qu'elle sera $\ell$-extrémale.

Rem Pour que $(*)$ soit possible, il faut que l'ensemble de monômes $\mathcal{M}_\ell$ respecte des règles combinatoires satisfaites par les $q$-caractères de repr intégrables de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}^{tor})$ (voir par exemple [Frenkel-Mukhin-01]). Un ensemble de monômes qui respecte ces règles est appelé clos dans [Mansuy-12]. C'est une condition nécessaire pour que $(*)$ soit possible.

prop [M-12] $\mathcal{M}_\ell$ est un ensemble de monômes clos ssi $\ell = 1, r+1$ ou $n$

Thm [M-12] Supposons que $\ell = 1, r+1$ ou $n$. Alors il existe une représentation $V_\ell$ de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1}^{tor})$ qui satisfait $(*)$.

Idée de la démo Beamer : cas $n=3$, $\ell=2$.

Thm [M-12] $V_\ell$ est $\ell$-extrémal de $\ell$-poids $e^{\varpi_\ell} Y_{\ell,1} Y_{0,q^{d_\ell}}^{-1}$. De plus $V_\ell$ est irréductible et on a :

$$V_\ell \overset{\mathcal{U}_q^h(\mathfrak{sl}_{n+1}^{tor})}{\simeq} V(\varpi_\ell).$$

## 4.2. Représentations $\ell$-extrémales et produits tensoriels

Rem : Les représentations extrémales $V(\lambda)$ $(\lambda \in P)$ de $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}_{n+1})$ sont liées au produit tensoriel

$$V(\lambda_+) \otimes V(\lambda_-) \quad \text{où } \lambda_+, \lambda_- \in P^+ \text{ tq } \lambda = \lambda_+ - \lambda_- .$$

([K-94]).

Idée Considérer le produit tensoriel $W_\ell = V(e^{\Lambda_\ell} Y_{\ell,1}) \otimes V(e^{-\Lambda_0} Y^{-1}_{0,q^{d_\ell}})$. (dans l'esprit de Kash.)

Seulement, on ne connait pas de structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{U}_q(sl^{tor}_{n+1})$.

On connait cependant un coproduit $\Delta$ (coproduit de Drinfeld) qui est à valeur dans une complétion de $\mathcal{U}_q(sl^{tor}_{n+1}) \otimes \mathcal{U}_q(sl^{tor}_{n+1})$ (fait intervenir des sommes infinies).

Thm [M-à paraître] Le coproduit $\Delta$ est bien défini sur $W_\ell$ et munit ce produit tens. d'une structure de $\mathcal{U}_q(sl^{tor}_{n+1})$-module.

$$\text{Posons } \quad v = v^+ \otimes v^- \quad \text{et} \quad T_\ell = \mathcal{U}_q(sl^{tor}_{n+1}) . v \subseteq W_\ell .$$

prop [M-àp] Supposons que ($n$ pair et $\ell \neq 1, n$) ou ($n = 2r+1$ impair et $\ell \neq 1, r+1, n$). Alors $v$ n'est pas extrémal pour $\mathcal{U}_q^h(sl^{tor}_{n+1})$.

Thm [M-ap] $T_\ell$ est $\ell$-extrémal de $\ell$-poids $e^{\varpi_\ell} Y_{\ell,1} Y^{-1}_{0,q^{d_\ell}}$ si $\ell = 1$ ou $\ell = n$.
De plus, on a alors $T_\ell \simeq V_\ell$.

Rem On conjecture que le résultat est vrai pour $n = 2r+1$ et $\ell = r+1$.

## 4.3. Représentations aux racines de 1

Soit ($\ell = 1, n$) ou ($n = 2r+1$ et $\ell = r+1$). Posons $p = n+1$ ou $p = 2$ respectivement.

Alors on mq $\quad \tau_{p,-s} : Y_{i,q^d} \to Y_{i,q^{d+p}}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_\ell$.

Soit $L \geq 2$, $\varepsilon$ une racine primitive ($pL$) de 1. On note $\mathcal{U}_\varepsilon(sl^{tor}_{n+1})'$ l'alg définie comme $\mathcal{U}_q(sl^{tor}_{n+1})$ avec $\varepsilon$ à la place de $q$ (sans puissance divisée et élément de dérivation).

L'existence d'automorphismes $\tau_{p,-s}$ pour $\mathcal{M}_\ell$ implique :

Thm [M-12] Il existe une représentation irréd $(V_\ell)_\varepsilon$ de $\mathcal{U}_\varepsilon(sl^{tor}_{n+1})$. De plus

$$\dim (V_\ell)_\varepsilon = L \binom{n+1}{\ell} .$$