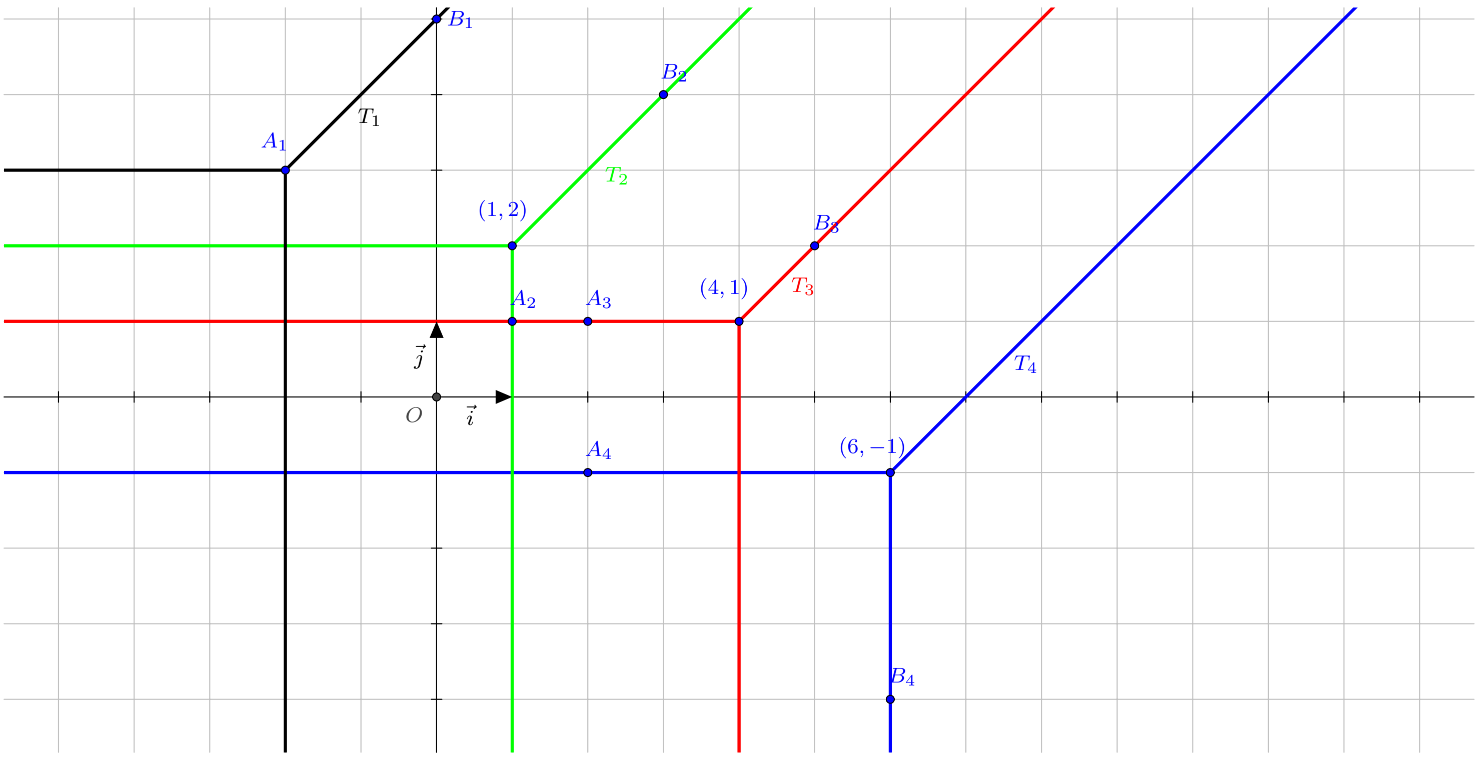
Droites tropicales

Solution.

1. a.



b. Soient deux points A et B quelconques du plan. On se place dans le repère orthonormé direct d'origine A. On discute alors selon les coordonnées de $B = (x, y)$ dans ce repère. Quitte à permuter les points A et B, on peut supposer que $x \geq 0$. On a alors selon les cas :
– si $y \geq 0, y \geq x$, la droite tropicale de centre $(0, y - x)$ convient,
– si $y \geq 0, x \geq y$, la droite tropicale de centre $(x - y, 0)$ convient,
– si $y \leq 0$, la droite tropicale de centre $(x, 0)$ convient.

c. La propriété n'est pas vraie lorsque les points ne sont pas indépendants. Par exemples pour $A = (0, 0)$ et $B = (1, 0)$, la droite tropicale de point central B passe bien par A et B, mais ce n'est pas la seule : c'est également le cas pour toutes les droites tropicales de point central $(x, 0)$ avec x un réel supérieur à 1.

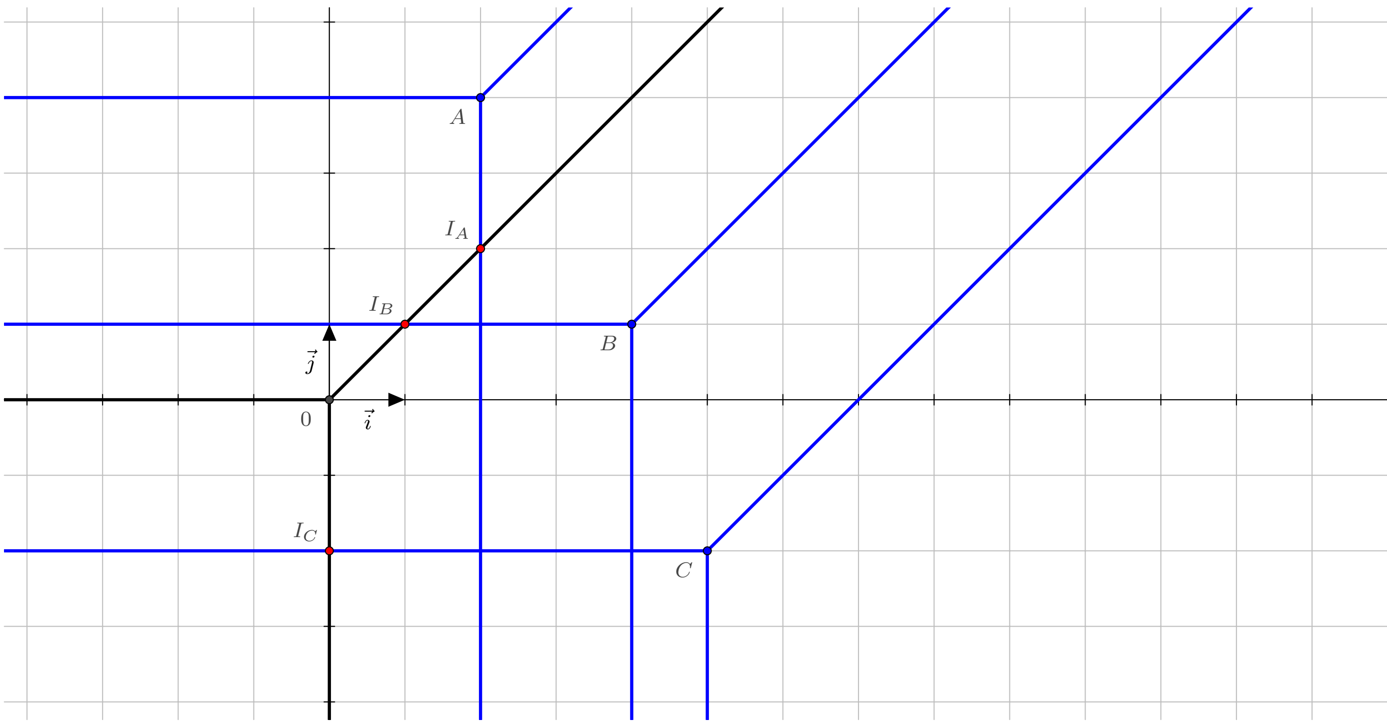
d. Soient deux points A et B indépendants du plan. On se place dans le repère orthonormé direct d'origine A. Soit (x, y) les coordonnées de B dans ce repère. Quitte à permuter les points A et B, on peut supposer que $x \geq 0$. Puisque A et B sont indépendants, l'abscisse de B ne peut être nulle, son ordonnée non plus et l'abscisse de B ne peut être égale à son ordonnée. Il n'y a donc que trois cas possibles :

$$(i)\ y > 0,\ y > x, \qquad (ii)\ y > 0,\ x > y, \qquad (iii)\ y < 0.$$

Considérons une droite tropicale passant par A et B. On discute du cas $y > 0, y > x$ (les autres cas se traitent de la même manière) : A ne peut être sur les demi-droites de directions $\vec{i} + \vec{j}$ et $-\vec{i}$. De même B ne peut être sur les demies droites de directions $-\vec{i}$ et $-\vec{j}$. Le centre de la droite tropicale est alors uniquement déterminée par l'intersection de la droite verticale passant par A et de la droite oblique (de pente 45 degrés) passant par B : c'est la droite tropicale de centre $(0, y - x)$.

2. a. Montrons que l'intersection de deux droites tropicales dans les points centraux sont dépendants est une demi-droite d'origine l'un des centres de ces droites et dirigé par $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ ou $\vec{i} + \vec{j}$. Considérons deux droites tropicales T_1 et T_2 dont les points centraux $C_1 = (x_1, y_1)$ et $C_2 = (x_2, y_2)$ sont dépendants. Supposons par exemple que $x_1 = x_2$, et quitte à changer les notations que $y_1 \leq y_2$. Alors l'intersection des deux droites tropicales T_1 et T_2 est la demi droite d'origine C_1 et dirigée par $-\vec{j}$. Les autres situations se traitent de la même façon.

   b.

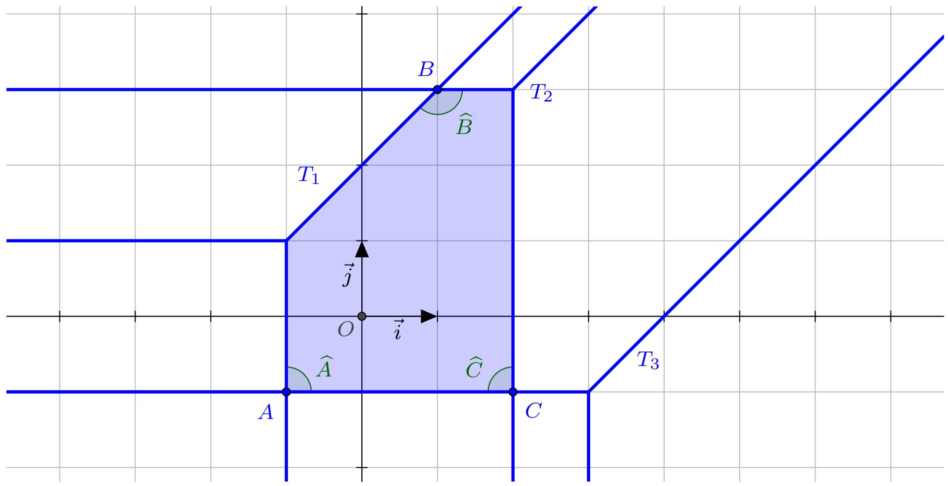


Les points d'intersection sont respectivement les points $I_A = (2, 2)$, $I_B = (1, 1)$ et $I_C = (-2, 0)$.

   c. Notons A et B les points centraux des deux droites tropicales. On se place dans le repère orthonormé direct d'origine A. On discute alors selon les coordonnées de $B = (x, y)$ dans ce repère. Quitte à permuter les points A et B, on peut supposer que $x > 0$. On a alors selon les cas :

   – si $y > 0, y > x$: les deux droites tropicales s'intersectent en un unique point (x, x), intersection de la demi-droite de direction $-\vec{j}$ partant de B et de la demi-droite de direction $\vec{i} + \vec{j}$ partant de A.
   – si $y > 0, x > y$: les deux droites tropicales s'intersectent en un unique point (y, y), intersection de la demi-droite de direction $-\vec{i}$ partant de B et de la demi-droite de direction $\vec{i} + \vec{j}$ partant de A.
   – si $y < 0$: les deux droites tropicales s'intersectent en un unique point $(0, y)$, intersection de la demi-droite de direction $-\vec{i}$ partant de B et de la demi-droite de direction $-\vec{j}$ partant de A.

3. a. Ce n'est pas vrai pour tous les triangles tropicaux. Par exemple dans le cas suivant, on a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 315^\circ$.



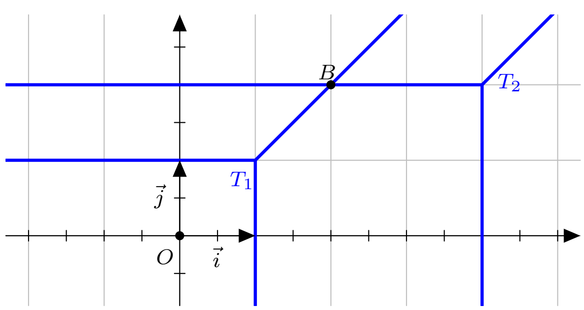
b. On va montrer qu'un triangle tropical dont les sommets A, B et C sont deux à deux indépendants est forcément de même “forme” que le triangle tropical de l'exemple, c'est à dire que les angles en ses sommets sont toujours les mêmes.

Considérons donc un triangle tropical de côtés T_1, T_2 et T_3 et de points centraux $C_1 = (x_1, y_1)$, $C_2 = (x_2, y_2)$ et $C_3 = (x_3, y_3)$ respectivement. On note de même que sur l'exemple A le sommet associé aux côtés T_1 et T_3, B le sommet associé aux côtés T_1 et T_2 et C le sommet associé aux côtés T_2 et T_3.

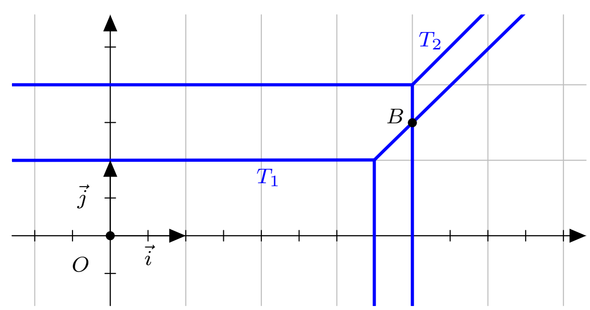
Puisque les points C_1, C_2 et C_3 sont deux à deux indépendants, on peut supposer (quitte à changer la numérotation des côtés) que

$$y_3 < y_1 < y_2.$$

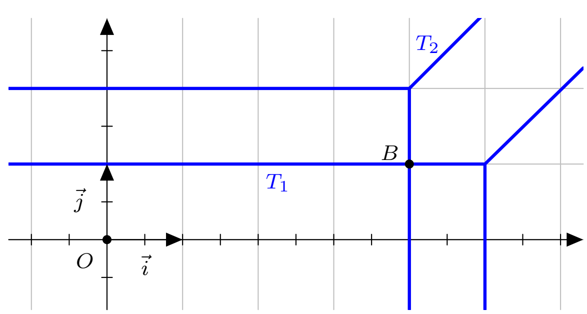
Étudions les configurations possibles pour les droites tropicales T_1 et T_2. Il en existe trois qui sont :



Configuration 1.

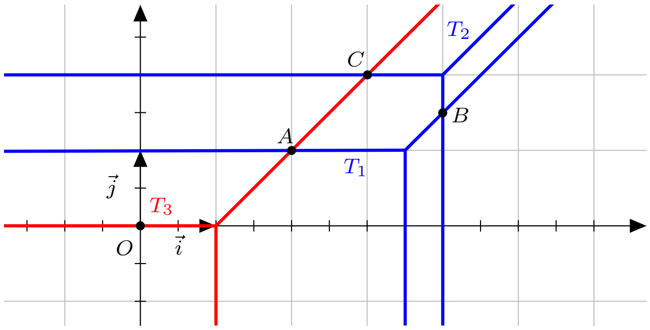


Configuration 2.

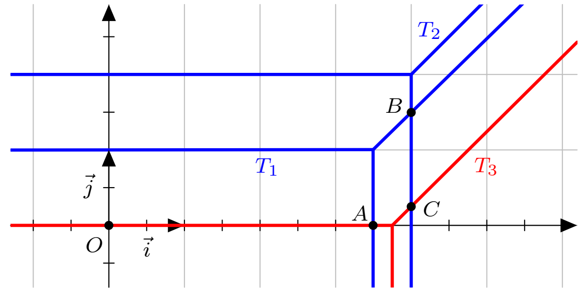


Configuration 3.

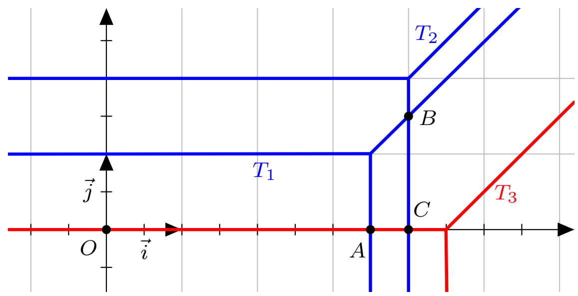
Montrons que la configuration 2 est impossible : en effet en discutant de tous les cas possibles pour la position de la droite tropicale T_3, on observe sur les schémas suivants que les sommets obtenus ne sont pas deux à deux indépendants.



Configuration 2.a. : A et C sont dépendants.



Configuration 2.b. : B et C sont dépendants.



Configuration 2.c. : A et C sont dépendants.

On montre de même que la configuration 3 est impossible si on suppose les sommets deux à deux indépendants.

Reste donc la configuration 1. On discute alors de la position de la droite T_3. On vérifie qu'un seul cas de figure permet d'obtenir des sommets deux à deux indépendants, celui donné en exemple.

On a donc montré que, pour que les sommets d'un triangle tropical soient deux à deux indépendants, on est nécessairement dans la configuration proposée dans l'énoncé. Et dans ce cas l'égalité d'angles est clairement vérifiée.