

Exercice académique numéro 1

Droites tropicales

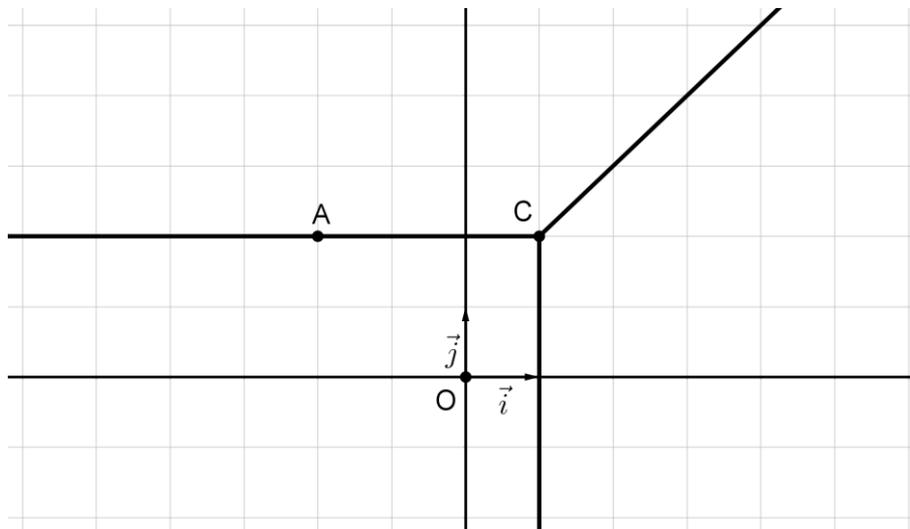
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit C un point du plan. On appelle **droite tropicale de point central C** la réunion des trois demi-droites d'origine C et dirigées respectivement par les vecteurs directeurs $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ et $\vec{i}+\vec{j}$.

On remarquera qu'une droite tropicale est déterminée de manière unique par la position de son point central.

On dit qu'une droite tropicale passe par un point lorsque ce point est situé sur l'une des trois demi-droites qui constituent la droite tropicale.

Par exemple, on a représenté ci-dessous la droite tropicale de point central $C(1 ; 2)$ passant par le point $A(-2 ; 2)$:



Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des droites tropicales ⁽¹⁾.

Dans cet exercice, le mot « droite » sans aucun adjectif qualificatif fait référence aux droites rencontrées en géométrie usuelle dite euclidienne ⁽²⁾.

On dit que deux points du plan sont **dépendants** s'ils appartiennent à une même droite de direction \vec{i} , de direction \vec{j} ou de direction $\vec{i}+\vec{j}$. Les deux points sont dits **indépendants** dans le cas contraire.

1. a. Tracer dans un même repère les droites tropicales suivantes et en préciser le point central.

- une droite tropicale T_1 passant par les points $A_1(-2 ; 3)$ et $B_1(0 ; 5)$;
- une droite tropicale T_2 passant par les points $A_2(1 ; 1)$ et $B_2(3 ; 4)$;
- une droite tropicale T_3 passant par les points $A_3(2 ; 1)$ et $B_3(5 ; 2)$;
- une droite tropicale T_4 passant par les points $A_4(2 ; -1)$ et $B_4(6 ; -4)$.

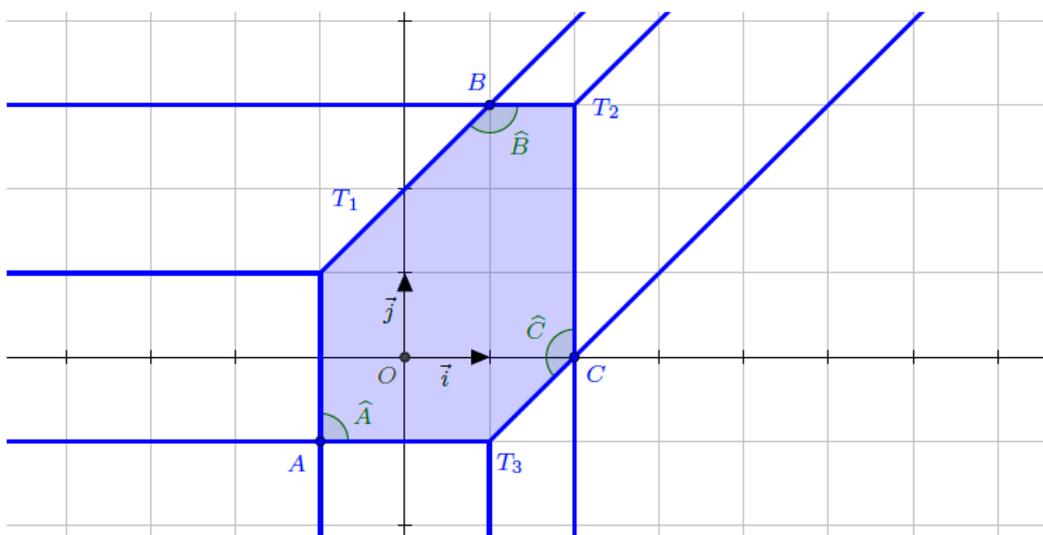
b. Démontrer la propriété « Par deux points quelconques du plan passe une droite tropicale ».

c. La propriété « Par deux points quelconques dépendants et non confondus du plan passe une et une seule droite tropicale » est-elle vraie ?

d. Démontrer la propriété « Par deux points quelconques indépendants et non confondus du plan passe une et une seule droite tropicale ».

- 2. a.** Etudier l'intersection de deux droites tropicales dont les points centraux sont dépendants.
- b.** Donner les points d'intersection de la droite tropicale de point central $O(0; 0)$ avec les droites tropicales de points centraux $A(2; 4)$, $B(4; 1)$ et $C(5; -2)$. On tracera pour cela ces droites tropicales dans un même repère.
- c.** Démontrer la propriété « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point ».
- 3.** On considère trois droites tropicales dont les points centraux sont supposés deux à deux indépendants. On appelle **triangle tropical** le domaine borné du plan délimité par ces trois droites tropicales. Les droites tropicales sont alors appelées les **côtés** du triangle tropical, et les points d'intersection de ces droites tropicales sont appelés les **sommets** du triangle tropical.

Par exemple, on a représenté ci-dessous le triangle tropical de sommets A, B, C et de côtés T_1, T_2 et T_3 :



- a.** On constate que sur l'exemple ci-dessus on a l'égalité d'angles : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$. Cette égalité est-elle vraie pour tous les triangles tropicaux ?
- b.** Montrer que l'on a l'égalité d'angles $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$ lorsqu'on suppose les sommets A, B, C du triangle tropical deux à deux indépendants.

-
- (1) Le qualificatif « tropicale » a été donné en l'honneur de l'informaticien brésilien Imre Simon (1943-2009).
- (2) Euclide dans son livre « Les Éléments » (300 av. J.-C.) énonce trois propriétés sur les droites :
- par deux points quelconques du plan passe une droite ;
 - par deux points quelconques et non confondus du plan passe une et une seule droite ;
 - deux droites non parallèles se coupent toujours en un unique point.