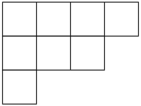
Tableaux de Young et Bases Cristallines de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$

Mathieu Mansuy

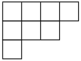
29 novembre 2012

Un diagramme de Young est une collection de boîtes justifiées à gauche telle que le nombre de boîtes décroît à chaque ligne.



On note $|Y|$ le nombre de boîtes composant le tableau de Young Y.

$$\{\text{diagrammes de Young}, |Y| = N\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{partitions de N}\}$$

Exemple : La partition de $N = 8$ correspondante à  est $\lambda = (4, 3, 1)$.

Un tableau de Young (semi-standard) est un diagramme de Young dont chaque boîte contient un entier compris entre 1 et $n+1$ suivant les conditions

- les nombres inscrits dans les boîtes croissent de gauche à droite,
- les nombres inscrits dans les boîtes croissent strictement de haut en bas.

Pour une partition λ, on notera $\mathcal{Y}(\lambda)$ l'ensemble des tableaux de Young de forme λ.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 4 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \in \mathcal{Y}(4,3,1)$$

Pour un tableau de Young T on définit

- son poids : $\mathrm{wt}(T) = k_1\epsilon_1 + \cdots k_{n+1}\epsilon_{n+1}$, où $k_i =$ nombre de i dans T,
- le mot $\mathrm{m}(T)$ associé à T : $\mathrm{m}(T)$ est obtenu en lisant les entrées de T de haut en bas et de droites à gauche (écriture Japonnaise).

Exemple : Pour $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$, $\mathrm{wt}(T) = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 + 2\epsilon_4$, et $\mathrm{m}(T) = 42313124$.

On peut retrouver T à partir de $\mathrm{m}(T)$ en cassant le mot dès qu'une entrée est plus grande que la suivante.

$$\mathrm{m}(T) = 4|23|13|124$$

Les diagrammes et tableaux de Young apparaissent naturellement lors de l'étude des représentations de dimension finie de certains groupes ou algèbres, notamment

1. du groupe symétrique S_n et de son analogue quantique, l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n$,
2. du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et de l'algèbre de Lie associée $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$,

Plus précisément, les modules simples de dimension finie de ces algèbres peuvent être décris par des diagrammes de Young.

Notons

$$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) = \{x \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \mathrm{tr}(x) = 0\}.$$

Posons $e_i = E_{i,i+1}$, $f_i = E_{i+1,i}$, $h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ $\forall i = 1, \cdots, n$.

$$e_i = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, f_i = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, h_i = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pour tout $j = 1, \ldots, n$, on définit $\epsilon_j : \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\epsilon_j(T) = t_{j,j}$.

$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ munie de $[x, y] = xy - yx$ est une algèbre de Lie engendrée par les e_i, f_i, h_i satisfaisant

$$[h_i, h_j] = 0,$$

$$[h_i, e_j] = a_{i,j}e_j \ , [h_i, f_j] = -a_{i,j}f_j,$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{i,j}h_i,$$

$$[e_i, [e_i, e_{i+1}]] = [f_i, [f_i, f_{i+1}]] = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n-1,$$

$$[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0 \text{ si } j \neq i-1, i+1,$$

où $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ sont tels que $a_{i,i} = 2$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ ($i = 1, \ldots, n$) et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Remarque : Les racines simples α_i et les poids fondamentaux Λ_i peuvent s'exprimer à l'aide des ϵ_i par

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \ , \Lambda_i = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i.$$

Représentation vectorielle de $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$

Soit $(\boxed{j})_{1\leq j\leq n+1}$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$. On fait agir $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication à gauche :

$$\begin{aligned} h_i \cdot \boxed{j} &= \epsilon_j(h_i)\boxed{j}, \\ e_i \cdot \boxed{j} &= \delta_{i,j-1}\boxed{j-1}, \\ f_i \cdot \boxed{j} &= \delta_{i,j}\boxed{j+1}. \end{aligned}$$

On l'appelle la représentation vectorielle de $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Définition (Drinfeld, Jimbo - 1985)

$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ est la $\mathbb{C}(q)$-algèbre associative engendrée par les éléments $e_i, f_i, k_i^{\pm 1}$ ($i = 1, \cdots, n$) avec les relations

$$k_i^{\pm 1} k_j^{\pm 1} = k_j^{\pm 1} k_i^{\pm 1} \;,\; k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1,$$

$$k_j e_i k_j^{-1} = q^{a_{i,j}} e_i \;,\; k_j f_i k_j^{-1} = q^{-a_{i,j}} f_i,$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{i,j} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

et des relations supplémentaires (les relations de Serre).

Limite classique : Quand $q \to 1$, on retrouve l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ ($q = \exp(\hbar), k_i = \exp(\hbar \cdot h_i)$ et prendre $\hbar \to 0$).

$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ est muni d'un coproduit Δ défini par

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes k_i^{-1} + 1 \otimes e_i \ , \ \Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + k_i \otimes f_i,$$

$$\Delta(k_i^{\pm 1}) = k_i^{\pm 1} \otimes k_i^{\pm 1}.$$

On définit le $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-module $V(\epsilon_1)$ de dimension $n+1$ en posant $V(\epsilon_1) = \bigoplus_{1 \leq j \leq n+1} \mathbb{C}(q)\boxed{j}$ et

$$\begin{aligned} k_i \cdot \boxed{j} &= q^{\epsilon_j(h_i)}\boxed{j}\ , \\ e_i \cdot \boxed{j} &= \delta_{i,j-1}\boxed{j-1}\ , \\ f_i \cdot \boxed{j} &= \delta_{i,j}\boxed{j+1}\ . \end{aligned}$$

On l'appelle la représentation vectorielle de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$.

Soit V un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-module de dimension finie. On peut montrer que

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\epsilon_{n+1}} V_\lambda = \bigoplus_\lambda \{v \in V | k_i \cdot v = q^{\lambda(h_i)} v\}.$$

Le caractère de V est

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_\lambda \dim(V_\lambda) e^\lambda.$$

Théorème

1. Les $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-modules simples de dimension finie sont paramétrés par les diagrammes de Young $Y = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$. On notera $V(Y)$ le module simple associé au diagramme de Young Y.
2. Tout $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-module de dimension finie est somme direct de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-modules simples (= sans sous-module non-trivial) de dimension finie.

Cas particulier $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$

1. Les $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-modules simples de dimension finie $V(k)$ ($k \in \mathbb{N}$) sont paramétrés par les entiers naturels.
2. $V(k) \hookrightarrow V(\epsilon_1)^{\otimes k}$ et est isomorphe au sous-$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-module de $V(\epsilon_1)^{\otimes k}$ engendré par $u_k = \boxed{1} \otimes \cdots \otimes \boxed{1}$. Il est de dimension $(k+1)$, et on en obtient une base en considérant la famille de vecteurs ($f^{(k+1)} \cdot u_k = 0$)

$$f^{(l)} \cdot u_k \, , \, 0 \leq l \leq k.$$

Ici,

$$[l]_q = \frac{q^l - q^{-l}}{q - q^{-1}} \, , \, [l]_q! = [1]_q \cdots [l]_q \text{ et } f^{(l)} = \frac{f^l}{[l]_q!}$$

Exemple : Considérons le $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-module $V(1) \otimes V(1)$. On a la décomposition

$$\begin{aligned} V(1) \otimes V(1) &= V(2) \oplus V(0) \\ &= < \boxed{1} \otimes \boxed{1}, \boxed{2} \otimes \boxed{1} + q\boxed{1} \otimes \boxed{2}, \boxed{2} \otimes \boxed{2} > \\ &\quad \oplus < \boxed{1} \otimes \boxed{2} - q\boxed{2} \otimes \boxed{1} > . \end{aligned}$$

Pour $q \to 0$, on obtient

$$V(1) \otimes V(1) = < \boxed{1} \otimes \boxed{1}, \boxed{2} \otimes \boxed{1}, \boxed{2} \otimes \boxed{2} > \oplus < \boxed{1} \otimes \boxed{2} > .$$

Remarque : La base provenant de l'action de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ est plus simple en $q = 0$.

$\mathcal{A} = \{f \in \mathbb{C}(q) | f$ est régulière en $0\}$ sous-anneau de $\mathbb{C}(q)$.

Définition

Une base locale en $q = 0$ d'un $\mathbb{C}(q)$-e.v. V est une paire $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ où

- $\mathcal{L}$ est un sous-$\mathcal{A}$-module libre de V tq $\mathbb{C}(q) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{L} = V$,
- $\mathcal{B}$ est une base du $\mathbb{C}$-e.v. $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$.

Exemple : $V(k)$ ($k \in \mathbb{N}$) admet pour base locale

$$(\mathcal{L}(V(k)), \mathcal{B}(V(k))) = \left(\sum_l \mathcal{A} f^{(l)} \cdot u_k, \{f^{(l)} \cdot u_k \bmod q\mathcal{L}(V(k))\} \right).$$

Définition

Soient V un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-module de dimension finie et $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ une base locale de V. Elle est dite cristalline s'il existe un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\nu V(k_\nu)$ envoyant bijectivement $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ sur $(\bigoplus_\nu \mathcal{L}(V(k_\nu)), \bigsqcup_\nu \mathcal{B}(V(k_\nu)))$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $V(k) = \bigoplus_{0 \leq l \leq k} \mathbb{C}(q) f^{(l)} \cdot u_k$.

Définition

On définit $\tilde{e}, \tilde{f} : V(k) \to V(k)$ par

$$\tilde{e} \cdot f^{(l)} u_k = f^{(l-1)} u_k \ , \ \tilde{f} \cdot f^{(l)} u_k = f^{(l+1)} u_k$$

pour $0 \leq l \leq k$, avec $\tilde{e} \cdot u_k = \tilde{f} \cdot f^{(k)} u_k = 0$.

$\tilde{e}, \tilde{f}$ sont appelés les opérateurs de Kashiwara.

Théorème

Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ une base cristalline d'un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-module de dimension finie V. On a

1. $\tilde{e}\mathcal{L} \subset \mathcal{L}, \tilde{f}\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, et induisent des endomorphismes sur $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$,
2. $\tilde{e}\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}, \tilde{f}\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$,
3. si $b, b' \in \mathcal{B}$, alors $b' = \tilde{e}b$ ssi $\tilde{f}b' = b$.

Graphe cristallin

$\mathcal{B}$ peut être considéré comme un graphe orienté avec

$$b \to b' \text{ si } b' = \tilde{f} b.$$

Exemple : Le graphe cristallin associé à $\mathcal{B}(V(k))$ est

$$\overline{u_k} \to \overline{f u_k} \to \cdots \to \overline{f^{(k)} u_k}.$$

Corollaire

Tout graphe cristallin associé à un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-module de dimension finie est une union finie de telles chaînes.

Exemple : Graphe cristallin associé à $V(1) \otimes V(1)$:

$$V(1) \otimes V(1) = < \boxed{1} \otimes \boxed{1}, \boxed{2} \otimes \boxed{1}, \boxed{2} \otimes \boxed{2} > \oplus < \boxed{1} \otimes \boxed{2} > .$$

Exemple : Considérons le $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_3)$-module $V(\begin{smallmatrix}\square\square\\ \square\end{smallmatrix})$. On peut le voir comme module sur $< e_1, f_1, k_1^{\pm 1} > \simeq \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ pour lequel on a la décomposition

$$\begin{aligned} V(\begin{smallmatrix}\square\square\\ \square\end{smallmatrix}) &= < u, f_1 u > \oplus < f_2 u, f_1 f_2 u, f_1^{(2)} f_2 u > \oplus < f_2^{(2)} f_1 u, f_1 f_2^{(2)} f_1 u > \\ &\quad \oplus < f_2 f_1 u - \frac{q}{1+q^2} f_1 f_2 u > \end{aligned}$$

ou sur $< e_2, f_2, k_2^{\pm} > \simeq \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ et on a

$$\begin{aligned} V(\begin{smallmatrix}\square\square\\ \square\end{smallmatrix}) &= < u, f_2 u > \oplus < f_1 u, f_2 f_1 u, f_2^{(2)} f_1 u > \oplus < f_1^{(2)} f_2 u, f_2 f_1^{(2)} f_2 u > \\ &\quad \oplus < f_1 f_2 u - \frac{q}{1+q^2} f_2 f_1 u > \end{aligned}$$

où $u \in V(\begin{smallmatrix}\square\square\\ \square\end{smallmatrix}) - \{0\}$ est tel que $e_1 u = e_2 u = 0$.

Lorsque $q \to 0$, les deux bases de $V(\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix})$ coïncident. Comme module sur $< e_1, f_1, k_1^{\pm 1} >$

$$\begin{aligned} V(\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix}) &= < u, f_1 u > \oplus < f_2 u, f_1 f_2 u, f_1^{(2)} f_2 u > \oplus < f_2^{(2)} f_1 u, f_1 f_2^{(2)} f_1 u > \\ &\quad \oplus < f_2 f_1 u > \end{aligned}$$

et sur $< e_2, f_2, k_2^{\pm} >$, on a

$$\begin{aligned} V(\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\end{smallmatrix}) &= < u, f_2 u > \oplus < f_1 u, f_2 f_1 u, f_2^{(2)} f_1 u > \oplus < f_1^{(2)} f_2 u, f_2 f_1^{(2)} f_2 u > \\ &\quad \oplus < f_1 f_2 u > . \end{aligned}$$

Définition

Une base cristalline $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ d'un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-module V de dimension finie est une base locale en $q = 0$ satisfaisant

1. $(\mathcal{L}, \mathcal{B}) = \bigoplus_\lambda (\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{B}_\lambda)$ où $(\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{B}_\lambda)$ est une base locale de V_λ,
2. $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ est une base cristalline de V pour tous les $< e_i, f_i, k_i^{\pm 1} > \simeq \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

On définit alors les opérateurs de Kashiwara $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$, et le graphe cristallin associé à $\mathcal{B}$ en posant $b \xrightarrow{i} b'$ si $b' = \tilde{f}_i b$.

Théorème (Kashiwara - 1990)

Soit Y un tableau de Young et $V(Y)$ le $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-module simple de dimension finie associé. Alors il existe une unique base cristalline $(\mathcal{L}(Y), \mathcal{B}(Y))$ de $V(Y)$ (à isomorphisme près).

Théorème (Kashiwara - 1990)

Soit V un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-module de dimension finie et $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ une base cristalline de V. Alors il existe un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\nu V(Y_\nu)$ tel que

$$(\mathcal{L}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\nu (\mathcal{L}(Y_\nu), \mathcal{B}(Y_\nu)).$$

Exemple : Graphe cristallin associé à la représentation vectorielle $V(\epsilon_1)$:

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3} \xrightarrow{3} \cdots \xrightarrow{n} \boxed{n+1}$$

Exemple : Graphe cristallin associé à $V(\begin{smallmatrix}\square & \square \\ \square & \end{smallmatrix})$:

$$\begin{tikzcd}
 & & u \arrow[dll, "1"'] \arrow[drr, "2"] & & \\
f_1 u \arrow[dr, "2"] & & & & f_2 u \arrow[dl, "1"'] \\
 & f_2 f_1 u \arrow[drrr, "2"] & & f_1 f_2 u \arrow[dlll, "1"'] & \\
f_1^{(2)} f_2 u \arrow[drr, "2"] & & & & f_2^{(2)} f_1 u \arrow[dll, "1"'] \\
 & & f_2 f_1^{(2)} f_2 u = f_1 f_2^{(2)} f_1 u & &
\end{tikzcd}$$

Proposition

Soit $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-module de dimension finie et $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ une base cristalline de V. Alors

$$\mathrm{ch}(V) = \sum_\lambda (\sharp B_\lambda) e^\lambda.$$

Théorème (Produit tensoriel)

Soit V_j un $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$-module de dimension finie et $(\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j)$ une base cristalline de V_j, $j = 1, 2$. Posons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. Alors $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ est une base cristalline de $V_1 \otimes V_2$.

Théorème

Soit $Y = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ un diagramme de Young. Alors $\mathcal{B}(Y)$ est isomorphe au sous-cristal (= composante connexe) de $\mathcal{B}(\varepsilon_1)^{\otimes N}$ $(N = |Y|)$ contenant

$$u_Y = \boxed{1}^{\otimes \lambda_1 - \lambda_2} \otimes \left(\boxed{1} \otimes \boxed{2}\right)^{\otimes \lambda_2 - \lambda_3} \otimes \cdots$$

Les actions de $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$ s'obtiennent comme suit :
si $b = \boxed{a_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{a_N}$,

1. négliger les a_k autres que i et $i+1$,
2. négliger les $\boxed{i} \otimes \boxed{i{+}1}$,
3. à ce stade, on a un élément de la forme $b' = \boxed{i{+}1} \otimes \cdots \otimes \boxed{i{+}1} \otimes \boxed{i} \otimes \cdots \otimes \boxed{i}$. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i \cdot b' &= \boxed{i{+}1} \otimes \cdots \otimes \boxed{i} \otimes \boxed{i} \otimes \cdots \otimes \boxed{i} (= 0 \text{ si } i+1 \notin b') \\ \tilde{f}_i \cdot b' &= \boxed{i{+}1} \otimes \cdots \otimes \boxed{i{+}1} \otimes \boxed{i{+}1} \otimes \cdots \otimes \boxed{i} (= 0 \text{ si } i \notin b') \end{aligned}$$

On montre que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(Y) &= \{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} u_Y | l \geq 0, 1 \leq i_1, \cdots, i_l \leq n\} \\ &= \{\mathrm{m}(T) | T \text{ tableau de Young de forme } Y\}. \end{aligned}$$

Théorème

Pour tout diagramme de Young Y, la base cristalline associée $\mathcal{B}(Y)$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{Y}(Y)$ des tableaux de Young semi-standard de forme Y.

Corollaire

La dimension de $V(Y)$ est égale au nombre de tableaux de Young semi-standard de forme Y.

Exemple : On détermine la réalisation par les tableaux de Young de la base cristalline $\mathcal{B}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}\right)$ pour $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_3)$.

- On part du tableau de Young $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$. On a $\mathrm{m}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right) = \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$ et
  - pour $\tilde{f}_1$: $\boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \overset{(2)}{\longrightarrow} \boxed{1} \overset{(3)}{\longrightarrow} \boxed{2}$, d'où $\tilde{f}_1 \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$,
  - pour $\tilde{f}_2$: $\boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \overset{(1)}{\longrightarrow} \boxed{2} \overset{(3)}{\longrightarrow} \boxed{3}$, d'où $\tilde{f}_2 \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$.

- On considère le tableau de Young $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$. On a $\mathrm{m}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\right) = \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$ et
  - pour $\tilde{f}_1$: $\boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \overset{(2)}{\longrightarrow} \boxed{2} \overset{(3)}{\longrightarrow} 0$, d'où $\tilde{f}_1 \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = 0$,
  - pour $\tilde{f}_2$: $\boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \overset{(1)}{\longrightarrow} \boxed{2} \overset{(3)}{\longrightarrow} \boxed{3}$, d'où $\tilde{f}_2 \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$.

- $\cdots$

On cherche la décomposition de $V(Y) \otimes V(Y')$ en modules simples (où Y, Y' sont des diagrammes de Young).

Définition

- $\boxed{a}$ est admissible par rapport à Y si le diagramme $Y + a$ obtenu en rajoutant une boîte à Y à l'extrémité droite de sa a-ième ligne est encore un diagramme de Young,
- $\boxed{a_1} \otimes \cdots \boxed{a_N}$ est admissible par rapport à Y si $\forall 1 \leq k \leq N$, $\boxed{a_k}$ est admissible par rapport à $(\cdots (Y + a_1) + \cdots) + a_{k-1}$.

Théorème

$$V(Y) \otimes V(Y') = \bigoplus V((\cdots (Y + a_1) + \cdots) + a_N)$$

où $N = |Y'|$ et la somme est prise sur l'ensemble des $\boxed{a_1} \otimes \cdots \boxed{a_N} \in \mathcal{B}(Y')$ admissibles par rapport à Y.

On étudie $V(\ydiagram{1,1}) \otimes V(\ydiagram{2,1})$.

$$\mathcal{B}(\ydiagram{2,1}) = \left\{ \ytableaushort{11,2}, \ytableaushort{12,2}, \ytableaushort{13,2}, \ytableaushort{11,3}, \ytableaushort{12,3}, \ytableaushort{13,3}, \ytableaushort{22,3}, \ytableaushort{23,3} \right\}$$

- $((\ydiagram{1,1} + 1) + 1) + 2 = (\ydiagram{2,1} + 1) + 2 = \ydiagram{3,1} + 2 = \ydiagram{3,2}$.
  $\boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$ est admissible par rapport à $\ydiagram{1,1}$.

- $((\ydiagram{1,1} + 2) + 1) + 2 = (\ydiagram{1,2} + 1) + 2$.
  $\boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$ n'est pas admissible par rapport à $\ydiagram{1,1}$.

On montre que seulement $\ytableaushort{11,2}, \ytableaushort{13,2}, \ytableaushort{11,3} \in \mathcal{B}(\ydiagram{2,1})$ contribuent au produit tensoriel. Finalement,

$$V(\ydiagram{1,1}) \otimes V(\ydiagram{2,1}) = V(\ydiagram{3,2}) \oplus V(\ydiagram{2,2,1}) \oplus V(\ydiagram{3,1,1}).$$

Prolongements possibles

1. Des procédés combinatoires sur les tableaux de Young ont des interprétations en théorie des représentations.
2. Pour les algèbres de Lie de types différents, des tableaux de Young et des règles de LR similaires existent.
3. Il existe d'autres réalisations des bases cristallines : réalisation par des chemins (Littelmann), réalisation monomiale, ...
4. Les bases cristallines sont des bases locales en $q = 0$. On peut les "remonter" en de vraies bases, appelées bases globales (Kashiwara). Elle ont été introduites indépendamment par Lusztig sous le nom de bases canoniques.