Titre : Classification des algèbres de Nambu-Poisson

Mathieu Mansuy

Résumé : En 1973, Y. Nambu a proposé une généralisation de la mécanique Hamiltonienne, basée sur la notion de n-crochet en lieu et place du crochet de Poisson usuel. La dynamique de Nambu est décrite par le flot donné par un système différentiel faisant intervenir $n-1$ Hamiltoniens :

$$\frac{du}{dt} = \{u, h_1, \cdots, h_{n-1}\}.$$

Le crochet de Nambu satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{(Leibniz)} \quad & \{f_1, \cdots f_{n-1}, gh\} = \{f_1, \cdots f_{n-1}, g\}h + g\{f_1, \cdots f_{n-1}, h\}; \\
\text{(Filippov-Jacobi)} \quad & \{f_1, \cdots f_{n-1}, \{g_1, \cdots g_n\}\} = \sum_i \{g_1, \cdots, \{f_1, \cdots f_{n-1}, g_i\}, \cdots, g_n\}; \\
\text{(antisymétrie)} \quad & \{f_{\sigma(1)}, \cdots f_{\sigma(n)}\} = sign(\sigma)\{f_1, \cdots f_n\}.
\end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on retrouve la définition du crochet de Poisson. Un premier exemple, proposé par Nambu, est donné par le Jacobien sur les fonctions de n variables :

$$\{f_1, \cdots, f_n\} = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}. \qquad (*)$$

C'est en fait le "seul" : on montrera dans cet exposé le résultat suivant.

Théorème. Pour $n > 2$, toute algèbre de Nambu-Poisson simple linéairement compacte est isomorphe à l'algèbre des séries formelles à n variables munie du crochet $(*)$.

Cette classification sur laquelle j'ai travaillé à l'Université de Bologne a été obtenue par N. Cantarini et V. Kac l'année dernière.