Chapitre 1

Raisonner et rédiger

1 Propositions logiques **3**
- 1.1 Propositions, prédicats 3
- 1.2 Négation, conjonction, disjonction 3
- 1.3 Implication, équivalence 5

2 Quantificateurs **7**
- 2.1 Quantificateur universel, quantificateur existentiel 7
- 2.2 Succession de quantificateurs 8
- 2.3 Négation des propositions quantifiées 8

3 Les modes de raisonnements **9**
- 3.1 Disjonction de cas 9
- 3.2 Montrer une implication ou une équivalence 9
- 3.3 Raisonnement déductif 10
- 3.4 Raisonnement par l'absurde 11
- 3.5 Raisonnement par Analyse - Synthèse 12

4 Raisonnement par récurrence **13**
- 4.1 Récurrence simple 13
- 4.2 Récurrence multiple à pas fixé 14
- 4.3 Récurrence forte 14
- 4.4 Récurrence finie 15

Compétences attendues.

- ✓ Connaître et savoir manipuler les connecteurs logiques usuels.
- ✓ Savoir exprimer une proposition à l'aide de quantificateurs.
- ✓ Savoir formuler la négation d'une proposition.
- ✓ Mettre en œuvre des modes de raisonnements adaptés (par disjonction de cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse).
- ✓ Rédiger une récurrence (simple, double, forte).

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

(Très) brève description des mathématiques

Les mathématiques actuelles sont bâties de la façon suivante :

- on part d'un nombre restreint de propositions, appelées *axiomes*, supposées vraies a priori (et que l'on ne cherche donc pas à démontrer) ;
- on définit ensuite la notion de *démonstration*, en décidant par exemple de ce qu'est une implication, une équivalence, ... C'est sur ce point que nous nous attarderons dans ce chapitre ;
- on construit à partir des axiomes et à l'aide de démonstrations de nouvelles propositions mathématiques. On appelle *théorème* une telle proposition, que l'on a donc pu démontrer à partir des axiomes que l'on s'est fixé. Trois autres mots sont couramment utilisés pour désigner certaines formes de théorèmes :
  - on appelle *lemme* tout théorème préparatoire à la démonstration d'un plus gros théorème ;
  - on appelle *corolaire* tout théorème qui est une conséquence presque immédiate d'un plus gros théorème ;
  - on appelle *caractérisation* tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est donc au fond ce qu'on pourrait appeler une « redéfinition ».

À partir des axiomes, on obtient donc des théorèmes qui viennent petit à petit enrichir la théorie mathématique. Au cours de l'élaboration de ces théorèmes, on sera amené à proposer :

- des définitions : une *définition* est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet et auquel on accorde un nom jusqu'ici inusité ;
- des conjectures : une *conjecture* est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer.

Le saviez-vous ?

Le plus ancien exemple connu d'un traitement axiomatique des mathématiques est l'œuvre d'Euclide, mathématicien d'origine grecque qui vivait trois cents ans avant notre ère. Son ouvrage fondamental, intitulé *Les Éléments*, regroupe toutes les connaissances mathématiques de l'époque en géométrie et en théorie des nombres. Euclide classe les propositions dans un ordre logique et se focalise sur la réflexion mathématique en la dégageant de tout fondement métaphysique ou philosophique. Sa démarche est nouvelle puisqu'il justifie ses raisonnements rigoureusement en se basant sur des postulats (affirmation considérée comme évidente, et donc non démontrée). Son influence sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamentale.

Les Éléments, constitués de 13 livres organisés par thématique, forment probablement le recueil ayant rencontré le plus de succès au cours de l'Histoire : ce fut l'un des premiers livres imprimés (Venise, 1482) et ne fut très probablement précédé que par la Bible pour le nombre d'éditions publiées (largement plus de 1 000).

Des cinq postulats énoncés dans le livre I, le dernier, dont on déduit le postulat des parallèles :

« en un point extérieur à une droite, ne passe qu'une unique droite qui lui est parallèle »

a toujours semblé moins évident que les autres. Plusieurs mathématiciens soupçonnèrent qu'il pouvait être démontré à partir des autres postulats, mais toutes les tentatives pour ce faire échouèrent. Vers le milieu du $19^{ème}$ siècle, il fut établi qu'une telle démonstration n'existe pas, que le cinquième postulat est indépendant des quatre autres et qu'il est possible de construire des géométries non euclidiennes cohérentes (c'est-à-dire qui n'amènent pas de contradiction, à savoir des propositions à la fois vraies et fausses) en prenant sa négation. On peut construire ainsi deux autres types de géométries aux multiples applications :

- la *géométrie hyperbolique*, qui prend pour postulat que « par un point extérieur à une droite, on peut mener une infinité de droites qui lui sont parallèles » ;
- la *géométrie elliptique*, prenant pour postulat que « par un point extérieur à une droite, on ne peut mener aucune parallèle ».

Retenons de cela que le choix du système d'axiomes qu'on se donne pour fondement d'une théorie est une problématique difficile mais fondamentale, car elle définit ce qui sera ou non démontrable. Et qu'il en existe plusieurs possibilités suivant le domaine dans lequel on veut travailler.

1 Propositions logiques

1.1 Propositions, prédicats

Définition.

On appelle *proposition logique* (ou *assertion*) toute phrase $\mathscr{P}$ dont on peut dire si elle est vraie ou fausse. La *valeur de vérité* de $\mathscr{P}$ est soit « vrai » (noté généralement V) soit « faux » (noté F).

Exemples. La proposition « 2 est pair » est vraie, « 3 est pair » est fausse.

Remarque. Une proposition peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres, comme par exemple « $x \geq 1$ » qui dépend d'un réel x, ou « n est divisible par 6 » qui dépend d'un entier n. On parle alors de *prédicat*.

Notation.

Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $\mathscr{P}(x)$. L'ensemble E sera suivant les cas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou un sous-ensemble de l'un de ces ensembles ($\mathbb{N}^*$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\} =]-3;3[$, $[2;4]$, ...).

Exemples.

- Si on pose $\mathscr{P}(x)$: « $x \geq 1$ », alors $\mathscr{P}(2)$ est vraie, $\mathscr{P}(-1)$ est fausse.
- De même, si on note $\mathscr{P}(n)$: « n est divisible par 6 », alors $\mathscr{P}(5)$ est fausse, $\mathscr{P}(-12)$ est vraie.
- Les symboles usuels $=$, $\leq$ et $<$ sont des prédicats à deux paramètres.

On appelle *connecteur logique* tout procédé de construction de nouvelles propositions à partir de propositions existantes. Nous présentons dans la suite les principaux connecteurs logiques.

1.2 Négation, conjonction, disjonction

Définition.

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

- La *négation* de $\mathscr{P}$, notée $\neg\mathscr{P}$ (qui se lit « **non** $\mathscr{P}$ »), est la proposition qui est vraie lorsque $\mathscr{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathscr{P}$ est vraie.
- La *conjonction* de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, notée $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$ (qui se lit « $\mathscr{P}$ **et** $\mathscr{Q}$ ») est vraie lorsque les deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont vraies, fausse dans le cas contraire.
- La *disjonction* de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, notée $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$ (qui se lit « $\mathscr{P}$ **ou** $\mathscr{Q}$ »), est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{Q}$ est vraie, fausse dans le cas contraire.

Exemples.

- La négation de $\mathscr{P}$: « $x < 4$ » est $\neg\mathscr{P}$: « $x \geq 4$ ». La négation de $\mathscr{Q}$: « $x^2 = 3$ » est $\neg\mathscr{Q}$: « $x^2 \neq 3$ ».
- La négation de « il fait beau tous les jours » est « certains jours, il ne fait pas beau ».
- Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}(n)$: « n est pair » et $\mathscr{Q}(n)$: « n est divisible par 3 ». Alors $\mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{Q}(n)$ est la proposition « n est divisible par 6 », et $\mathscr{P}(n) \vee \mathscr{Q}(n)$ est la proposition « n est divisible par 2 ou par 3 », qui est vraie pour tous les entiers qui ne sont pas de la forme $6k+1$ ou $6k+5$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Mise en garde.

On prendra garde au fait que le **ou** logique est un ou inclusif, contrairement au ou du langage courant qui lui est exclusif (par exemple dans « Fromage ou Dessert »).

La *table de vérité* d'une formule $\mathscr{R}$ construite à partir d'autres propositions (qu'on appellera plutôt *variables propositionnelles*) est un tableau donnant la valeur de vérité de $\mathscr{R}$ en fonction des valeurs de vérité des propositions utilisées pour la construire. Donnons les tables de vérités des trois connecteurs logiques précédemment introduits.

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\neg\mathscr{P}$	$\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Deux formules qui ont la même table de vérité sont dites *equivalentes*. Autrement dit, quelle que soit la valeur de vérité des variables propositionnelles qui les composent, elles ont la même valeur de vérité.
Si deux formules $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont équivalentes, on note alors $\mathscr{P} \equiv \mathscr{Q}$.

Propriété 1

Soit $\mathscr{P}$ une proposition.

- $\neg(\neg\mathscr{P}) \equiv \mathscr{P}$;
- $\mathscr{P} \wedge (\neg\mathscr{P})$ est fausse ;
- $\mathscr{P} \vee (\neg\mathscr{P})$ est vraie (*principe du tiers-exclus*).

Preuve. On dresse les tables de vérités.

□

Remarque. Les deux derniers points traduisent le fait que $\mathscr{P}$ est toujours soit vraie, soit fausse, et ne peut être les deux à la fois.

Propriété 2 (*Lois de De Morgan*)

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

- $\neg(\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}) \equiv (\neg\mathscr{P}) \vee (\neg\mathscr{Q})$;
- $\neg(\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}) \equiv (\neg\mathscr{P}) \wedge (\neg\mathscr{Q})$.

Preuve. On dresse là aussi les tables de vérités.

□

Exemples.

- Si $\mathscr{P}$ est la proposition « je fais de la randonnée » et $\mathscr{Q}$ la proposition « je fais de l'escalade », alors $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$ est la proposition « je fais de la randonnée et de l'escalade ». Sa négation est $(\neg\mathscr{P}) \vee (\neg\mathscr{Q})$: « je ne fais pas de randonnée ou ne fais pas d'escalade ».

  La négation de $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$: « je fais de la randonnée ou de l'escalade » est $(\neg\mathscr{P}) \wedge (\neg\mathscr{Q})$: « je ne fais pas de randonnée et ne fais pas d'escalade » (ou encore « je ne fais ni randonnée, ni escalade »).
- La négation de $\mathscr{P}$: « $-1 < x \leq 2$ » est $\neg\mathscr{P}$: « $x \leq -1$ **ou** $x > 2$ ».

Propriété 3

Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ des propositions.

- *Commutativité.* $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q} \equiv \mathscr{Q} \wedge \mathscr{P}$ et $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q} \equiv \mathscr{Q} \vee \mathscr{P}$.
- *Associativité.* $\mathscr{P} \wedge (\mathscr{Q} \wedge \mathscr{R}) \equiv (\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}) \wedge \mathscr{R}$ et $\mathscr{P} \vee (\mathscr{Q} \vee \mathscr{R}) \equiv (\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}) \vee \mathscr{R}$.
- *Ditributivité.* $\mathscr{P} \wedge (\mathscr{Q} \vee \mathscr{R}) \equiv (\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}) \vee (\mathscr{P} \wedge \mathscr{R})$ et $\mathscr{P} \vee (\mathscr{Q} \wedge \mathscr{R}) \equiv (\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}) \wedge (\mathscr{P} \vee \mathscr{R})$.

Preuve. Encore une fois, on obtient ce résultat en dressant des tables de vérités. □

Remarque. L'associativité autorise, lorsqu'on utilise plusieurs fois de suite le même symbole $\wedge$ ou $\vee$, de se dispenser de préciser le parenthèsage.

1.3 Implication, équivalence

Définition.

Étant données deux propositions logiques $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, on dit que $\mathscr{P}$ *implique* $\mathscr{Q}$, et on note $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, lorsque, si $\mathscr{P}$ est vraie, alors $\mathscr{Q}$ est vraie. Sa table de vérité est donc la suivante :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque. Dire que la proposition $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ est vraie signifie que dès que $\mathscr{P}$ est vraie, alors $\mathscr{Q}$ l'est aussi. Par exemple, si x est un nombre réel, alors « $x \geq 4 \Rightarrow x \geq 0$ » est vraie, puisqu'un réel plus grand que 4 est positif. En revanche, si x n'est pas plus grand que 4 (donc si « $x \geq 4$ » est fausse), alors « $x \geq 0$ » peut être vraie (par exemple si $x = 1$) ou fausse (si $x = -1$).

Vocabulaire. Lorsque $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, on dit $\mathscr{P}$ est une *condition suffisante* de $\mathscr{Q}$ et que $\mathscr{Q}$ est une *condition nécessaire* de $\mathscr{P}$. Pour que $\mathscr{Q}$ soit vraie, **il suffit que** $\mathscr{P}$ soit vraie. Pour que $\mathscr{P}$ soit vraie, **il faut que** $\mathscr{Q}$ soit vraie.

Propriété 4 (Transitivité de l'implication)

Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ trois propositions. Alors

$$((\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \wedge (\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{R})) \Rightarrow (\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{R})$$

est vraie.

Preuve. On fera une table de vérité. □

Définition.

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

- L'implication $(\neg \mathscr{Q}) \Rightarrow (\neg \mathscr{P})$ est appelée la *contraposée* de $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.
- L'implication $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$ est appelée l'*implication réciproque* de $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

Exemple. La contraposée de la proposition « la nuit, tous les chats sont gris » est « si au moins un chat n'est pas gris, alors il fait jour ». Sa réciproque est « si tous les chats sont gris, alors il fait nuit ».

Propriété 5

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions.

- $\neg(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \equiv \mathscr{P} \wedge (\neg\mathscr{Q})$ et $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \equiv (\neg\mathscr{P}) \vee \mathscr{Q}$.
- L'implication $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ et sa contraposée sont équivalentes. Autrement dit :

$$(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \equiv (\neg\mathscr{Q} \Rightarrow \neg\mathscr{P}).$$

Preuve.

□

Exemple. En utilisant le premier point de la proposition précédente, on obtient que la négation de « la nuit, tous les chats sont gris » est « la nuit, il existe au moins un chat qui n'est pas gris ».

Mise en garde.

Il ne faut pas confondre réciproque et contraposée. Comme dit précédemment, une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité. En revanche, il n'y a pas de lien entre une implication et sa réciproque, l'une peut être vraie et pas l'autre, les deux peuvent être vraies, etc.

Définition.

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathscr{P}$ est *équivalente* à $\mathscr{Q}$ (ou que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$, la proposition qui est vraie lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ont les mêmes valeurs de vérité, fausse sinon. Sa table de vérité est donc :

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propriété 6

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont deux propositions logiques, alors les propositions $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ et $(\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}) \wedge (\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P})$ sont équivalentes.

Preuve. On dresse la table de vérité de ces deux propositions et on constate qu'elles sont égales. □

Vocabulaire. Lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathscr{P}$ est vraie **si, et seulement si,** $\mathscr{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathscr{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* de $\mathscr{Q}$. Ou encore que pour que $\mathscr{Q}$ soit vraie, **il faut et il suffit que** $\mathscr{P}$ soit vraie.

2 Quantificateurs

2.1 Quantificateur universel, quantificateur existentiel

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat dépendant d'une variable x appartenant à un ensemble E.

Définition.

On note « $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$ », et on lit « pour tout x appartenant à E, $\mathscr{P}(x)$ », la proposition qui est vraie si quel que soit l'élément x dans l'ensemble E, la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie.
Le symbole $\forall$ est appelé *quantificateur universel*.

Exemples.

- La proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$ » est vraie car le carré d'un réel est toujours positif.
- La proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x \geq 0$ » est fausse, puisque pour $x = -1$, on a $x^2 + 2x = -1 < 0$.
- Soit (u_n) une suite. Alors la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$ » signifie que la suite est constante.

Rédaction.

Quand on souhaite montrer que « $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ », on commencera systématiquement par écrire :

> Soit $x \in E$. Montrons $\mathscr{P}(x)$.

En particulier, toutes les variables utilisées dans un raisonnement doivent être introduites au préalable.

Définition.

On note « $\exists x \in E, \mathscr{P}(x)$ », et on lit « il existe x appartenant à E, $\mathscr{P}(x)$ », la proposition qui est vraie s'il existe au moins un élément x_0 dans l'ensemble E pour lequel la proposition $\mathscr{P}(x_0)$ est vraie.
Le symbole $\exists$ est appelé *quantificateur existentiel*.

Exemples.

- La proposition « $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ » est vraie, puisqu'il existe bien un réel positif, par exemple $x = 2$.
- La proposition « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 + 1 = 0$ » est vraie, puisque $z = \pm i$ convient. En revanche, « $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 = 0$ » est fausse. On prendra donc garde à l'ensemble auquel appartient la variable quantifiée.

Rédaction.

Quand on souhaite montrer que « $\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ », et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{P}(x_0)$ est vraie, on écrira :

> Posons $x_0 = \dots$ (l'exemple qu'on a en tête). Vérifions que $\mathscr{P}(x_0)$ est vraie.

Mise en garde.

Les symboles $\forall$ et $\exists$ **ne** sont **pas** des abréviations et **ne** doivent **jamais** être employés au cœur d'une phrase en français pour dire « pour tout » ou « il existe ». Par exemple, on n'écrit pas « $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto e^{nx}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ », ni « $\exists$ un entier naturel plus petit que tous les autres ». Ce qu'on peut faire, c'est inclure une proposition quantifiée dans une phrase en français en l'annonçant avec deux points « : ».

Définition.

On note « $\exists!\, x \in E, \mathscr{P}(x)$ », et on lit « il existe un unique x appartenant à E, $\mathscr{P}(x)$ », la proposition qui est vraie s'il existe un unique élément x_0 dans l'ensemble E pour lequel la proposition $\mathscr{P}(x_0)$ est vraie.

Remarque. Autrement dit, « $\exists!\, x \in E, \mathscr{P}(x)$ » équivaut à :

$$\exists x \in E,\ (\mathscr{P}(x)\ \textbf{et}\ (\forall y \in E,\ (\mathscr{P}(y) \Rightarrow y = x))).$$

2.2 Succession de quantificateurs

Une proposition logique peut contenir plusieurs quantificateurs successifs.

Exercice. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ » ;
- « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$ ».

Danger.

L'ordre des quantificateurs est important : changer l'ordre des quantificateurs peut changer la valeur de vérité de la proposition.

Remarque. On peut cependant permuter l'ordre de deux quantificateurs de même nature (deux universels ou deux existentiels). On s'autorisera par conséquent à écrire par exemple « $\forall x, y \in E,\ \mathscr{P}(x, y)$ » au lieu de « $\forall x \in E, \forall y \in E,\ \mathscr{P}(x, y)$ ».

2.3 Négation des propositions quantifiées

Propriété 7

- La négation de « $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » est « $\exists x \in E$, **non** $\mathscr{P}(x)$ ».
- La négation de « $\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » est « $\forall x \in E$, **non** $\mathscr{P}(x)$ ».

Mise en garde.

La négation de « $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » n'est surtout pas « $\forall x \in E$, **non** $\mathscr{P}(x)$ ».

Exemples.

- La négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 0$ » est « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$ ».
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La négation de « f est la fonction nulle » est « $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ ».

On peut généraliser ce procédé au cas d'une succession de quantificateurs. On procède alors comme suit pour nier une proposition.

Méthode. Négation d'une proposition.

Pour nier une proposition avec des quantificateurs, on appliquera les deux étapes suivantes :

- *on remplace tout quantificateur existentiel par un quantificateur universel et réciproquement (sans en changer l'ordre) ;*
- *on nie la conclusion.*

Remarque. Ceci est déjà l'usage dans le langage courant : la négation de l'affirmation « tous les élèves sont bruns » est « il existe un élève non brun ».

Exercice. Écrire la négation des propositions suivantes :

- « $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$ » ;
- « $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon)$ ».

Remarque. La première proposition est la définition de « f est majorée », la seconde celle de « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ».

Exercice. Soit f une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs la négation des propositions suivantes :

- « la fonction f est constante » ;
- « la fonction f est croissante ».

3 Les modes de raisonnements

3.1 Disjonction de cas

Méthode. Démonstration par disjonction de cas.

Pour démontrer une proposition $(\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x))$, on peut raisonner par ***disjonction des cas*** *en écrivant E sous la forme $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$, puis en prouvant séparément pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la proposition $(\forall x \in E_i,\ \mathscr{P}(x))$.*

Exercice. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

3.2 Montrer une implication ou une équivalence

On souhaite montrer une implication $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ entre deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

Méthode. Raisonnement direct.

Quand on souhaite montrer que $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, on peut procéder par un raisonnement direct en rédigeant comme suit :

> *Supposons $\mathscr{P}$ vraie. Montrons que $\mathscr{Q}$ est vraie.*

Exercice. Montrer que si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Proposons une autre méthode. Nous avons montré précédemment qu'une implication $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ est toujours équivalente à sa contraposée $(\neg\mathscr{Q}) \Rightarrow (\neg\mathscr{P})$.

Méthode. Raisonnement par contraposition.

Afin de montrer que $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, on peut préférer montrer l'implication $(\neg\mathscr{Q}) \Rightarrow (\neg\mathscr{P})$ par un raisonnement direct.

Exercice. Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

On souhaite à présent montrer une équivalence $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ entre deux propositions.

Méthode. Démonstration d'une équivalence.

Pour démontrer une équivalence $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$, deux possibilités :

- *soit on raisonne par double implication, en démontrant successivement que $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ et que $\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$;*
- *soit on raisonne directement par équivalence en changeant peu à peu $\mathscr{P}$ en $\mathscr{Q}$.*

Exemple. On a établi précédemment que :

- si n est un entier pair, alors n^2 est pair ;
- si n^2 est pair, alors n est pair.

Donc n est pair si, et seulement si, n^2 est pair.

Mise en garde.

Toute utilisation de la double flèche $\Leftrightarrow$ vous engage en sens direct **et en sens réciproque**.

3.3 Raisonnement déductif

Commençons ce paragraphe par une mise en garde.

Mise en garde.

- La véracité de l'implication $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ ne signifie en aucun cas que $\mathscr{Q}$ est vraie. Par exemple, l'implication « $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ » est vraie, mais si $x = 0$, il n'est pas vrai que $x^2 \geq 1$.

  La signification de « $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ » est « **si** $\mathscr{P}$ est vraie, **alors** $\mathscr{Q}$ est vraie ».

- De même, si on écrit « $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ », on ne se prononce ni sur la valeur de vérité de $\mathscr{P}$, ni sur celle de $\mathscr{Q}$. Par exemple, si x est un réel, alors « $x + 2 = x \Leftrightarrow 2 = 0$ ». L'équivalence ainsi écrite est vraie, mais ne signifie pas que l'une ou l'autre des deux assertions qui la composent le soient.

Méthode. Raisonnement déductif ou *modus ponens*.

Pour montrer qu'une proposition $\mathscr{Q}$ est vraie, il suffit de montrer qu'une proposition $\mathscr{P}$ est vraie et que $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

Exemple. Si x est un nombre dont la somme des chiffres est divisible par 3, alors x est divisible par 3. La somme des chiffres de 31782 est divisible par 3. Donc 31782 est divisible par 3

Rédaction.

- Le *modus ponens* est à voir comme une formalisation du « donc », déduction logique, ou de mots apparentés comme « ainsi », « par conséquent », « dès lors », ... En aucun cas ces mots ne doivent être remplacés par le symbole $\Rightarrow$ dans une copie.

  La situation typique d'utilisation du *modus ponens* est l'emploi d'un théorème : celui-ci s'écrit $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ où $\mathscr{P}$ est l'hypothèse et $\mathscr{Q}$ est la conclusion. Ainsi quand on utilise un théorème, il faudra bien préciser $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, soit concrètement dans une copie indiquer le nom du théorème employé et la validité de toutes les hypothèses.

- De même, la double flèche d'équivalence $\Leftrightarrow$ ne signifie pas « c'est-à-dire ». Nous utiliserons la double flèche $\Leftrightarrow$ essentiellement pour :
  - résoudre des équations et inéquations,
  - montrer des égalités d'ensembles.

3.4 Raisonnement par l'absurde

Méthode. Raisonnement par l'absurde.

*Pour montrer qu'une proposition $\mathscr{P}$ est vraie, on peut montrer que $(\neg\mathscr{P}) \Rightarrow$ **Faux**. On rédigera ainsi :*

Supposons $\mathscr{P}$ fausse.

... } *obtention d'une contradiction.*

Contradiction. Par conséquent, $\mathscr{P}$ est vraie.

Remarque. Puisque $((\neg\mathscr{P}) \Rightarrow$ **Faux**$) \equiv (\mathscr{P} \vee$ **Faux**$) \equiv \mathscr{P}$, si $((\neg\mathscr{P}) \Rightarrow$ **Faux**$)$ est vraie, alors $\mathscr{P}$ est également vraie.

Exercice. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice. Principe des tiroirs de Dirichlet.
On range $n+1$ paires de chaussettes dans une commode à n tiroirs. Montrer qu'il existe au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.

3.5 Raisonnement par Analyse - Synthèse

On considère un prédicat $\mathscr{P}(x)$ dépendant d'une variable $x \in E$. On souhaite déterminer l'*ensemble des solutions associé à* $\mathscr{P}$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathscr{S}$ des x dans E tels que $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

Méthode. Démonstration par Analyse - Synthèse.

Pour déterminer l'ensemble des x dans E tels que $\mathscr{P}(x)$ est vraie, il peut être intéressant de procéder par ***Analyse - Synthèse****. Le raisonnement se fait en deux temps :*

- ***Analyse.*** *On fixe $x \in E$.*

  On suppose que $\mathscr{P}(x)$ est vraie, et on en déduit des conditions nécessaires sur x.

  On restreint ainsi le champ des solutions possibles à un sous-ensemble $\mathscr{C}$ de E qui satisfait $\mathscr{S} \subset \mathscr{C}$.

- ***Synthèse.*** *Pour chaque élément $x \in \mathscr{C}$ satisfaisant les conditions nécessaires de l'analyse, on vérifie si $\mathscr{P}(x)$ vraie ou fausse, et donc si $x \in \mathscr{S}$ ou $x \notin \mathscr{S}$. On détermine ainsi si les conditions obtenues sont suffisantes ou non.*

À l'issue de ces deux étapes, on obtient l'ensemble $\mathscr{S}$ des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.

Exercice. Déterminer les solutions de l'équation $\sqrt{x+6} = x$ d'inconnue $x \in [-6, +\infty[$.

Remarque. Le raisonnement par Analyse - Synthèse est souvent employé pour montrer les propositions de la forme « $\exists! x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ ». Dans ce cadre, l'analyse réduit le champ des solutions possibles jusqu'à l'obtention d'un unique élément $x \in E$, puis la synthèse vérifie que cet élément est bel et bien solution.

L'avantage de passer par un raisonnement par Analyse - Synthèse est qu'il est difficile sinon de « deviner » un élément x solution du problème. En montrant l'unicité dans l'analyse, on prépare ici la preuve de l'existence qui est la synthèse.

Exercice. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

4 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence connaît plusieurs variantes, dont le but est à chaque fois de montrer qu'un prédicat $\mathscr{P}(n)$, dépendant de n, est valable pour tout n dans une certaine partie de $\mathbb{N}$. Ce principe repose sur la définition axiomatique de l'ensemble des entiers naturels, en particulier sur la propriété suivante qui est essentielle : toute partie non vide A de l'ensemble $\mathbb{N}$ a un plus petit élément a. Ceci signifie :

- d'une part que a est un élément de A ;
- d'autre part que a est inférieur ou égal à tout élément de la partie A.

4.1 Récurrence simple

Propriété 8 (Raisonnement par récurrence simple)

On considère un prédicat $\mathscr{P}$ sur $\mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;
- pour tout $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Preuve.

□

Exercice. Montrer que pour tout $n \geq 4$, $2^n \leq n!$.

4.2 Récurrence multiple à pas fixé

Propriété 9 (Raisonnement par récurrence multiple à pas fixé)

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat sur $\mathbb{N}$, et soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$, $\mathscr{P}(n_0+1)$, $\ldots$, $\mathscr{P}(n_0+k-1)$ soient vraies ;
- pour tout $n \geq n_0$, $(\mathscr{P}(n)$ **et** $\mathscr{P}(n+1)$ **et** $\ldots$ **et** $\mathscr{P}(n+k-1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+k)$.

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Preuve.

$\square$

Remarque. Pour $k=1$, on retrouve le raisonnement par récurrence simple présenté précédemment. On parle de récurrence double pour $k=2$, triple pour $k=3$, $\ldots$

Exercice. Soit $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Mise en garde.

Qui dit récurrence **double**, dit initialisation **double**.

4.3 Récurrence forte

Propriété 10 (Raisonnement par récurrence forte)

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfaisant :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;
- pour tout $n \geq n_0$, $(\forall k \in [\![n_0, n]\!], \mathscr{P}(k)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Preuve. Notons $\mathscr{Q}(n)$ la proposition « $\forall k \in [\![n_0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie », et montrons par récurrence (simple) que pour tout $n \geq n_0$, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie.

Init. Pour $n = n_0$, la proposition $\mathscr{Q}(n_0)$ n'est autre que $\mathscr{P}(n_0)$, qui est donc vraie par hypothèse.

Hér. Soit $n \geq n_0$ tel que $\mathscr{Q}(n)$ est vraie. Alors $\mathscr{P}(n_0)$, $\mathscr{P}(n_0+1)$, ... , $\mathscr{P}(n)$ sont vraies. Par hypothèse, cela implique que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$\mathscr{P}(n_0)$, $\mathscr{P}(n_0+1)$, ... , $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ étant vraies, $\mathscr{Q}(n+1)$ est donc vraie.

Concl. Par principe de récurrence (simple), pour tout $n \geq n_0$, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie, et par conséquent $\mathscr{P}(n)$ est également vraie.

$\square$

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n u_0$.

4.4 Récurrence finie

Propriété 11 (Raisonnement par récurrence finie)

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat sur $\mathbb{N}$, et soient $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $n_0 < n_1$. On suppose que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;
- pour tout $n \in [\![n_0, n_1 - 1]\!]$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors, pour tout $n \in [\![n_0, n_1]\!]$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Preuve. Analogue à celle proposée pour le raisonnement par récurrence simple. $\square$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p < 1 + \dfrac{p}{n} + \left(\dfrac{p}{n}\right)^2$.