Chapitre 2

Ensembles

Compétences attendues.

✓ Montrer une inclusion entre ensembles, une égalité entre ensembles.

✓ Maitriser les bases du calcul ensembliste (et ses opérations union, intersection, complémentaire, produit cartésien).

✓ Montrer qu'une famille d'ensembles est une partition ou un recouvrement.

✓ Maitriser le vocabulaire de base sur les applications.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : mathieu-mansuy.fr/
E-mail : mathieu.mansuy@ac-dijon.fr

1 Ensembles

1.1 Définitions

La définition rigoureuse de la notion d'ensemble nécessite une axiomatique assez lourde (due à Zermolo et Fraenkel). Nous nous contentons pour notre part du point de vue intuitif suivant.

Définition.

- Un *ensemble* E est une collection ou un groupement d'objets distincts. Les objets x de E s'appellent les *éléments* de E.
- Si E est un ensemble et si x est un élément de E, on dit que x *appartient à* E ou que x *est dans* E et on écrit $x \in E$.

  Dans le cas contraire, si x n'est pas un élément de E, on dit que x *n'appartient pas à* E ou que x *n'est pas dans* E et on écrit $x \notin E$.
- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément, appelé l'*ensemble vide* et noté $\emptyset$.

Le saviez-vous ?

Longtemps, les mathématiciens se sont contentés de ce point de vue intuitif, sans chercher à formaliser cette notion. Ce n'est qu'à l'aube du $20^{ème}$ siècle qu'on s'est penché sur cette formalisation, qui a bien failli faire vaciller l'édifice mathématique sur ses fondations. En effet, Cantor, puis Russell au travers de son célèbre paradoxe, ont montré qu'on ne pouvait pas se contenter de cette approche intuitive, et que celle-ci amenait des contradictions si on admettait que toute collection pouvait être un ensemble.

Voici le « paradoxe de Russell » : on considère

$$E = \{\text{ensembles } F \text{ qui ne se contiennent pas eux-mêmes}\}.$$

Supposons par l'absurde que E soit un ensemble. Alors :

- si $E \notin E$, alors par définition de E, E est un élément de E, d'où une contradiction ;
- si $E \in E$, alors, par définition de E, E n'est pas élément de E, d'où une contradiction.

Cet argument très simple montre que E ne peut pas être un ensemble.

Ce paradoxe est aussi connu sous le nom de « paradoxe du barbier ». En effet, la situation s'apparente à celle d'un barbier qui rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ?

Ce paradoxe a en fait été envoyé en 1901 par Russell au logicien et philosophe allemand Gottlob Frege, suite à la parution du premier volume de son ouvrage *Les fondements de l'arithmétique*, pour lui prouver que son ouvrage reposait sur une contradiction. Frege publie tout de même le second volume, en lui adjoignant un appendice dans lequel il fait l'aveu et le constat sans doute les plus désarmants de toute l'histoire des mathématiques :

> « Pour un écrivain scientifique, il est peu d'infortunes pires que de voir l'une des fondations de son travail s'effondrer alors que celui-ci s'achève. C'est dans cette situation inconfortable que m'a mis une lettre de M. Bertrand Russell, alors que le présent volume allait paraître ».

À la suite de cela, Frege cessa presque entièrement ses travaux mathématiques.

Il y eu ensuite de nombreuses tentatives d'axiomatisation de la théorie des ensembles, toutes n'ont pas été fructueuses. Le choix qui s'est imposé est finalement l'axomatique de Zermelo-Fraenkel.

Cette « crise des fondements » a marqué la naissance des mathématiques et de la logique moderne, par une formalisation systématique de toutes les notions utilisées.

Un ensemble peut être défini de deux manières : soit *en extension*, soit *en compréhension*.

- Définir un ensemble en extension, c'est donner la liste complète explicite de tous ses éléments entre accolades. Dans cette liste :
  - l'ordre des éléments listés n'a aucune importance ;

– le nombre d'occurrences d'un élément n'a pas d'importance : un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble, mais il ne peut pas lui « appartenir plusieurs fois ». S'il apparait plusieurs fois, attention au fait qu'il s'agit du même élément.

Par exemple, $\{0, 1, 2\}$ est un ensemble, le même que $\{2, 1, 0\}$ ou que $\{1, 2, 2, 0\}$.

Un ensemble de la forme $\{x\}$ est appelé un *singleton*.

Il est bien évident qu'on ne peut définir en extension que des ensembles finis (il serait compliqué d'écrire tous les éléments d'un ensemble infini...).

- Définir un ensemble en compréhension, c'est le définir par une propriété $\mathscr{P}$ que ses éléments vérifient et sont seuls à vérifier. On note $\{x \in E \mid \mathscr{P}(x)\}$ l'ensemble des éléments x d'un ensemble E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.

  Par exemple, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N},\, n = 2p\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs. Cet ensemble peut également se noter $\{2p,\ p \in \mathbb{N}\}$, ou encore $\{2p\}_{p\in\mathbb{N}}$.

  Plus généralement, si $f : E \to F$ est une application[1] entre deux ensembles E et F, alors $\{f(x),\ x \in E\}$ désigne l'ensemble $\{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$.

Mise en garde.

Soyons bien clairs, il n'y a pas deux sortes d'ensembles en mathématiques, seulement deux manières de les décrire. Un même ensemble peut être présenté en extension ou en compréhension. Par exemple :

$$\{-1, 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 1\} = \{(-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Terminons cette section par la définition (intuitive) de cardinal d'un ensemble fini, notion qui sera précisée dans un chapitre ultérieur.

Définition.

Si E est un ensemble fini, on appelle *cardinal de* E, et on note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$, le nombre d'éléments de E.

Exemples. $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$, $\mathrm{Card}(\{\emptyset\}) = 1$ de même que pour tout singleton, $\mathrm{Card}(\{-1, 1\}) = 2$.

1.2 Inclusion, égalité, ensemble des parties

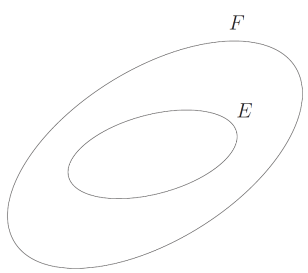
Définition.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est *inclus dans* F, et on note $E \subset F$, si tout élément de E est un élément de F :

$$\forall x,\ (x \in E \ \Rightarrow\ x \in F)\,,$$

soit en résumé : $\quad \forall x \in E, \quad x \in F.$

Diagramme de Venn. Ce sont des représentations schématiques d'ensembles. Par exemple, on peut schématiser l'inclusion $E \subset F$ de la façon suivante :



[1] Objet mathématique qui associe à un élément x de E un unique élément $f(x)$ de F. Nous en donnerons une définition plus précise dans la suite.

Méthode. Comment montrer une inclusion entre deux ensembles ?

Pour montrer que $E \subset F$, on prend un élément x quelconque de E et on prouve que x appartient à F. Une rédaction correcte commencera donc ***toujours*** *par « Soit $x \in E$ », pour terminer par « ... donc $x \in F$ ».*

Exemples.

- On a les inclusions suivantes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Pour tout ensemble E, on a toujours $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$. En effet pour la deuxième inclusion, la proposition « $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$ » est vraie (si besoin, on pensera pour s'en convaincre à sa négation « $\exists x \in \emptyset,\ x \notin E$ » qui est fausse puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément).

Exercice. Soit E l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et F l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que $E \subset F$.

Propriété 1 (Transitivité de l'inclusion)

Si A, B et C sont trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Preuve.

□

Définition.

Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble A est une *partie* de E ou un *sous-ensemble* de E si A est inclus dans E. L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

Exercice. Déterminer l'ensemble des parties de E lorsque :

- $E = \{1, 2\}$:
- $E = \{1, 2, 3\}$:

Remarque. On aura toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

Danger.

Il est important de bien distinguer les deux symboles $\in$ et $\subset$: le premier concerne un élément appartenant à un ensemble, le second concerne un ensemble inclus dans un autre ensemble.
Par exemple, la notation $A \subset E$ a la même signification que la notation $A \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice. Compléter avec les symboles $\in$ ou $\subset$.

$$0 \ \dots\ [0,1]\ ;\ \{1\}\ \dots\ \{1,2,3\}\ ;\ \{3\}\ \dots\ \mathbb{N}\ ;\ [-1,1]\ \dots\ \mathbb{R}\ ;\ \{0,1\}\ \dots\ \mathscr{P}(\mathbb{N})\ ;\ \{0\}\ \dots\ \mathscr{P}(\{0,1\})$$

$$[0,1]\ \dots\ \mathscr{P}([0,1])\ ;\ \{[0,1] \cup [3,4]\}\ \dots\ \mathscr{P}(\mathbb{R})\ ;\ \mathbb{N}\ \dots\ \mathbb{Z}\ ;\ \mathbb{N}\ \dots\ \mathscr{P}(\mathbb{R})\ ;\ \emptyset\ \dots\ \{\emptyset\}.$$

Définition.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont *égaux*, et on note $E = F$, lorsque E et F ont exactement les mêmes éléments :

$$\forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F).$$

Théorème 2 (Égalité d'ensembles)

Soient E et F deux ensembles. Alors :

$$E = F \quad \Leftrightarrow \quad (E \subset F \text{ et } F \subset E)\,.$$

Méthode. Comment montrer une égalité entre deux ensembles ?

On dispose de deux méthodes pour montrer que $E = F$:

- *soit par double inclusion en prouvant $E \subset F$ puis $F \subset E$;*
- *soit directement par équivalences, en prouvant que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.*

Exercice. Montrer par double inclusion que si $a < b$, alors : $\quad [a, b] = \{(1-t)a + tb,\ t \in [0,1]\}$.

Exercice. Montrer par équivalence que si A et B sont deux points distincts du plan, alors l'ensemble $E = \{M \mid MA = MB\}$ est la droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et passant par le milieu I de $[AB]$.

1.3 Union et intersection

Dans toute le suite, la lettre E désigne un ensemble.

Définition.

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$.

- L'*intersection de A et B* est l'ensemble, noté $A \cap B$, défini par :

$$A \cap B = \{x \in E \;\mid\; x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

En d'autres termes, l'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.

- L'*union de A et B* est l'ensemble, noté $A \cup B$, défini par :

$$A \cup B = \{x \in E \;\mid\; x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

En d'autres termes, l'union de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.

Remarque. Le « ou » utilisé ici est inclusif : x est un élément de A ou un élément de B ou un élément de A et de B.

Le saviez-vous ?
On doit les symboles $\cup$ et $\cap$ au mathématicien italien Giuseppe Peano, qu'il introduisit dans son *Formulaire mathématiques* publié en 1895. C'est également lui qui utilise le premier la lettre grecque epsilon $\in$, abréviation du grec « esti », il est, pour noter l'appartenance, et introduit le quantificateur existentiel $\exists$, renversant un E pour désigner l'initiale du mot italien « esists ».

Diagramme de Venn.

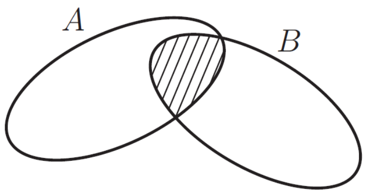


Schéma de $A \cap B$.

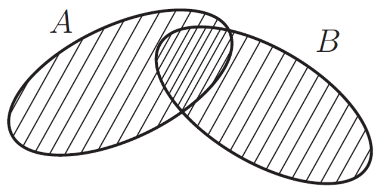


Schéma de $A \cup B$.

Exemples.

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A \cap B = \{2, 3\}$.
- $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$.
- Les inclusions suivantes sont toujours satisfaites :

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

Définition.

Soient E et I deux ensembles. On suppose que pour tout $i \in I$, on se donne A_i une partie de E. Alors on note :

- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments de E qui sont dans **tous** les A_i ;
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments de E qui sont dans **au moins l'un** des A_i.

Remarque. Notons que pour $I = \emptyset$, on a $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = E$ (car la proposition « $\forall i \in I$, $x \in A_i$ » est vraie pour tout $x \in E$) et $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ (car « $\exists i \in I$, $x \in A_i$ » est fausse pour tout x).

Exercice. Considérons un point du plan M fixé, et pour $n \in \mathbb{N}$, notons D_n le disque de centre M et de rayon $\frac{1}{n}$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n = \{M\}$.

Propriété 3 (Propriétés algébriques de l'intersection et l'union)

(1) L'intersection et l'union sont **commutatives** : pour tous éléments $A, B \in \mathscr{P}(E)$,

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

(2) L'intersection et l'union sont **associatives** : pour tous éléments $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

(3) E est **élément neutre** pour l'intersection : pour tout élément $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \cap E = A$.
$\emptyset$ est **élément neutre** pour la réunion : pour tout élément $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \cup \emptyset = A$.

(4) L'intersection et la réunion sont **distributives** l'une de l'autre : pour tous éléments $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Plus généralement, si $\{B_i,\ i \in I\}$ est un ensemble de parties de E, alors :

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \quad \text{et} \quad A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i).$$

Preuve.

□

1.4 Complémentaire

Définition.

Soit A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. La *différence de* A *avec* B est l'ensemble, noté $A \setminus B$ (qui se lit « A privé de B » ou « A moins B »), de tous les éléments de A qui ne sont pas dans B. Autrement dit :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Diagrammes de Venn.

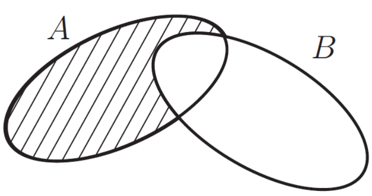


Schéma de $A \setminus B$
(Cas où $A \cap B \neq \emptyset$)

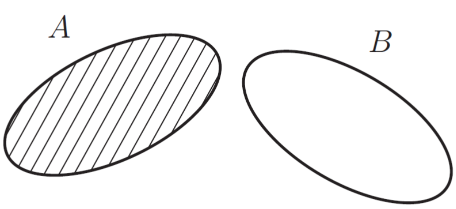


Schéma de $A \setminus B$
(Cas où $A \cap B = \emptyset$)

Définition.

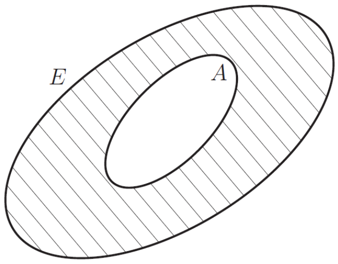
Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Le *complémentaire de A dans E* est l'ensemble, noté $\complement_E^A$, de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. Autrement dit :

$$\complement_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\} = E \setminus A.$$

Notation.

S'il n'y a pas d'ambigüité sur l'ensemble E, on privilégiera la notation $\overline{A}$ ou A^c.

Diagramme de Venn.



Propriété 4 (Propriétés algébriques du complémentaire)

Soient A et B deux parties de E.

(1) $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\emptyset} = E$, $\overline{E} = \emptyset$. (2) Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$. (3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Preuve.

$\square$

Exercice. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.

Propriété 5 (Lois de De Morgan)

- Si A et B sont deux parties de E, alors :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

- Plus généralement, si $\{A_i,\ i \in I\}$ est un ensemble de parties de E, alors :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Preuve.

□

1.5 Recouvrement disjoint, partition

Définition.

- Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. On dit que A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.
- Soit $\{A_i,\ i \in I\}$ un ensemble de parties de E. On dit que les A_i sont *deux à deux disjoints* si :

$$\forall i, j \in I,\ (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)\,.$$

Notation.

Si A et B sont disjoints, on notera parfois leur union $A \sqcup B$ (ou $A \coprod B$) au lieu de $A \cup B$.
De même, pour un ensemble $\{A_i,\ i \in I\}$ de parties deux à deux disjointes de E, on pourra noter $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ (ou $\coprod_{i\in I} A_i$) leur union $\bigcup_{i\in I} A_i$.

Définition.

Soit E un ensemble. On appelle *recouvrement disjoint de* E tout ensemble $\{A_i,\ i \in I\}$ de parties de E satisfaisant :

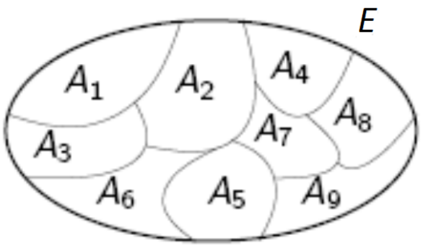
- $E = \bigcup_{i\in I} A_i$;
- les A_i sont deux à deux disjoints.

Si de plus A_i est non vide pour tout $i \in I$, on dit que $\{A_i,\ i \in I\}$ est une *partition d'un ensemble* E.

Exemples.

- Si $A \in \mathscr{P}(E)$, alors $\{A, \overline{A}\}$ est un recouvrement disjoint de E. Si de plus $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, alors c'est une partition de E.
- L'ensemble $\{\{x\},\ x \in E\}$ des singletons de E est une partition de E.
- L'ensemble des groupes de colle constitue une partition de l'ensemble des élèves de MP2I.

Diagramme de Venn.



Exercice. Donner toutes les partitions de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

Exercice. Pour $t \in [0, 1[$, notons $A_t = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \lfloor x \rfloor = t\}$. Montrer que $\{A_t,\ t \in [0, 1[\}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

1.6 Lien entre logique et ensemble

Coté logique	Coté ensembles	En détails
Implication Équivalence	Inclusion Égalité	$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$ $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Conjonction (**et**)	Intersection	$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \in B)$ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I,\ x \in A_i)$
Disjonction (**ou**)	Union	$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A$ **ou** $x \in B)$ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I,\ x \in A_i)$
Négation	Complémentaire	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ **non** $(x \in A)$

On remarquera en particulier les associations d'idées $\bigcap$/**et**/$\forall$ et $\bigcup$/**ou**/$\exists$.

1.7 Produit cartésien

Définition.

Un *couple* est la donnée de deux objets dans un ordre déterminé. Le couple formé des éléments a et b, dans cet ordre, est noté (a, b).

Deux couples (a, b) et (c, d) sont égaux si, et seulement si, $a = c$ et $b = d$.

Pour aller plus loin.

La définition précédente est bien entendu imprécise, mais nous suffira, en gardant à l'esprit que la seule chose vraiment importante est que deux couples sont égaux si, et seulement si, ils sont formés des mêmes éléments, dans le même ordre.

Si on souhaite définir rigoureusement le couple (a, b), on peut poser $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$. On vérifie alors que : $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.

Danger.

On ne confondra pas le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$, qui sont deux éléments de nature différente. En particulier, l'ordre des éléments d'un couple est important ($(2, 1) \neq (1, 2)$), alors que dans un ensemble, l'ordre n'a aucune importance ($\{1, 2\} = \{2, 1\}$).

Définition.

Soient E et F deux ensembles. Le *produit cartésien de E et F* est l'ensemble, noté $E \times F$, constitué de tous les couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F. Ainsi :

$$E \times F = \{(x, y) \ | \ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Si $E = F$, on note E^2 au lieu de $E \times E$.

Exemples.

- Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, $\emptyset \times \emptyset$ est encore l'ensemble vide. Plus généralement, $\emptyset \times E = E \times \emptyset = \emptyset$ pour tout ensemble E.
- $\{1, 2, 3\} \times \{0, 1\} = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$.
- $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. On peut le représenter graphiquement comme un plan muni d'un repère, tout couple (x, y) étant identifié au point de coordonnées (x, y).

  Si $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux segments de $\mathbb{R}$, alors $I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$ est un pavé de $\mathbb{R}^2$.

Définition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, un *n-uplet* d'objets est la donnée de n objets dans un ordre déterminé. On note $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le n-uplet formé des objets x_1, x_2, ..., x_n, dans cet ordre.
Deux n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont égaux si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = y_i$.

Définition.

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des ensembles. On appelle *produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_n$*, et on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} E_i$, l'ensemble formé des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2, \dots$, $x_n \in E_n$. Ainsi :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\}.$$

Si $E = E_1 = E_2 = \cdots = E_n$, on note E^n au lieu de $E \times \cdots \times E$.

Remarque. « Associativité » du produit cartésien.
Soient E, F et G trois ensembles. Un élément de $(E \times F) \times G$ est de la forme $((x, y), z)$ avec $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$. On l'identifiera alors au triplet $(x, y, z) \in E \times F \times G$, de sorte qu'on ne fera pas la différence entre $(E \times F) \times G$ et $E \times F \times G$. De même pour $E \times (F \times G)$, et plus généralement pour des produits de plus de trois termes.

2 Introduction à la notion d'application entre ensembles

2.1 Définitions et exemples

Définition.

Soient E et F deux ensembles. On dit que f est une *application de E dans F* lorsqu'à tout élément x de E, f associe un unique élément de F noté $f(x)$. E est l'*ensemble de départ* de f et F est l'*ensemble d'arrivée* de f. On note :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

On appelle *graphe* de l'application f le sous-ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ de $E \times F$.

Remarque. Pour une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le graphe de f est exactement ce dont on a l'habitude : l'ensemble des couples (x, y) où $y = f(x)$. Et la condition sur l'existence et l'unicité de $f(x)$ signifie que toute droite verticale rencontre le graphe en un unique point.

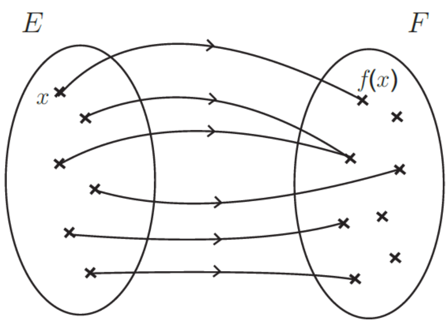
Pour aller plus loin.

Le point de vue choisi pour cette définition est volontairement intuitif (et c'est celui qu'on gardera à l'esprit) : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F.

Donnons pour information une définition rigoureuse d'une application, en traduisant de façon ensembliste cette action d'associer un élément à un autre en partant du graphe de l'application :

> Une application f est un triplet d'ensembles (E, F, Γ) tel que :
>
> - Γ est un sous-ensemble de $E \times F$;
> - pour tout $x \in E$, il existe un et un seul élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. Cet élément y est noté $f(x)$.

Représentation sagittale.



Notation.

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

Exemples.

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.
- $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cup X \end{array}$ où A est une partie d'un ensemble E.
- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Z} \\ \frac{p}{q} & \mapsto & p \end{array}$ n'est pas bien définie, car par exemple le rationnel 2 s'écrit à la fois $\frac{2}{1}$ et $\frac{4}{2}$, donc son image n'est pas uniquement définie. En revanche, l'application qui à un rationnel associe le numérateur de son écriture irréductible[2] est bien définie.
- La *fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E* est l'application $\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \{0, 1\} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$.

Définition.

Soit E un ensemble. On appelle *identité de E* l'application $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$.

[2] Nous montrerons que pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.

Remarque. Par définition, deux applications f et g sont égales si, et seulement si :

- elles ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée ;
- pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Définition.

Soit $f : E \to F$ une application.
Soient $x \in E$ et $y \in F$. Si $y = f(x)$, on dit que y est **l'***image de x par f*, et que x est **un** *antécédent de y par f*.
On appelle *image de f* l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Notons que c'est une partie de F, et qu'elle est formée des éléments de F qui possèdent au moins un antécédent par f.

Danger.

L'image d'un élément de l'ensemble de départ est toujours unique, par définition d'une application. En revanche, un élément de l'ensemble d'arrivée peut ne pas posséder d'antécédents, ou en posséder plusieurs. On prendra donc bien garde à dire **un** antécédent de y, et surtout pas **l'**antécédent de y par f.

Exemple. Considérons l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Alors 0 possède un unique antécédent par f qui est 0, 1 possède deux antécédents par f qui sont 1 et -1, et -1 ne possède aucun antécédent par f. En outre, l'image de f est $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Exercice. Soit A une partie d'un ensemble non vide E. Considérons l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cup X \end{array}$. Déterminer l'image de g, ainsi que l'ensemble des antécédents par g de $\emptyset$, A et E.

Définition.

Soient I et E deux ensembles. On appelle *famille (d'éléments) de E indexée par I* toute application de I dans E.

Notation.

Les familles, au lieu d'être notées comme des applications, sont presque toujours notées sous la forme $(x_i)_{i\in I}$. L'ensemble des familles de E indexée par I est naturellement noté E^I.

Remarques.

- Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E n'est rien de plus que l'application f de $[\![1, n]\!]$ dans E définie par les relations $f(1) = x_1, \ldots, f(n) = x_n$, et qui associe à chaque position l'élément qui lui correspond.
- Une suite, qui est une famille indicée par $\mathbb{N}$, n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$ pour les suites complexes). L'ensemble des suites réelles est donc noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour aller plus loin.

Une famille d'éléments de E indexée par l'ensemble vide est une application de $\emptyset$ dans E, et ça existe : par définition d'une application, l'ensemble vide est une application de $\emptyset$ dans E, et c'est la seule. On l'appelle la *famille vide de E*.

2.2 Composition d'applications

Définition.

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle *application composée* l'application de E dans G notée $g \circ f$ et définie par :

$$\forall\, x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Danger.

Le sens dans lequel on effectue la composition est important : même dans les cas où $g \circ f$ et $f \circ g$ sont toutes les deux bien définies (c'est-à-dire lorsque $G = E$), en règle générale ces deux applications ne sont pas égales.

Par exemple, si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + 2\pi \end{array}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = g(\sin(x)) = \sin(x) + 2\pi \neq \sin(x + 2\pi) = \sin(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Dans le cas particulier où l'espace de départ et l'espace d'arrivée de f sont égaux, alors on peut composer f avec elle-même. Puis composer cette composée avec f, etc.

Définition.

Soit E un ensemble, et soit $f : E \to E$ une application.

On pose alors $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f^{n+1} = f \circ f^n$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Propriété 6 (Propriétés de la composition)

Soient E, F, G, H des ensembles.

- Pour tout $f \in \mathscr{F}(E, F)$: $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_F \circ f = f$.
- Pour tous $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $g \in \mathscr{F}(F, G)$, $h \in \mathscr{F}(G, H)$: $\quad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Preuve.

□

Nous nous contentons de ces quelques définitions pour l'instant, et reviendrons dans un chapitre ultérieur sur l'étude générale des applications.