Chapitre 29

Espaces probabilisés finis et variables aléatoires

1 Espaces probabilisés finis **2**
- 1.1 Univers, événements 2
- 1.2 Probabilités 3
- 1.3 Premières règles de calcul d'une probabilité 4
- 1.4 Construction de probabilités 6

2 Probabilités conditionnelles **6**
- 2.1 Définition 6
- 2.2 Formule des probabilités composées . . . 7
- 2.3 Formules des probabilités totales 8
- 2.4 Formule de Bayes 9

3 Indépendance **10**

4 Variables aléatoires **11**
- 4.1 Définition 11
- 4.2 Loi d'une variable aléatoire 12
- 4.3 Lois usuelles 15
- 4.4 Indépendance de variables aléatoires . . 16

Compétences attendues.

- ✓ Savoir modéliser une expérience probabiliste en la traduisant en langage mathématique.
- ✓ Maitriser les principes de calculs des probabilités.
- ✓ Reconnaître les situations d'applications de la formule des probabilités composées, des formules des probabilités totales ou de la formule de Bayes.
- ✓ Introduire un système complet d'événements adéquat en vue d'appliquer la formule des probabilités totales.
- ✓ Déterminer la loi d'une variable aléatoire.
- ✓ Identifier et utiliser une loi usuelle.
- ✓ Identifier et exploiter une propriété d'indépendance.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Espaces probabilisés finis

Une *expérience aléatoire* est une donnée intuitive : c'est une expérience dont le résultat ne peut être prédit avec certitude. Dans ce chapitre, nous introduisons la notion d'*espace probabilisé*, cadre théorique et déterministe permettant de modéliser une telle expérience. Dans la suite, il n'y aura donc aucun hasard, nous ne ferons que le modéliser. Un résultat fondamental, la loi faible des grands nombres, viendra confirmer un peu plus tard que tout ce formalisme répond bien à l'intuition que l'on se fait d'une probabilité.

1.1 Univers, événements

On souhaite modéliser une expérience aléatoire.

Définition.

On appelle *univers* un ensemble Ω non vide. Les éléments ω de Ω sont appelés *issues* ou *réalisations*.

Remarque. L'univers Ω modélisera l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire. Par exemple :

- le lancer d'une pièce sera modélisé par $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$, ou $\{0, 1\}$;
- le lancer d'un dé sera modélisé par $\Omega = [\![1, 6]\!]$, le lancer de deux dés par $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$;

Remarque. Nous nous limiterons cette année à la modélisation d'expériences aléatoires ayant un nombre fini de résultats possibles. Ainsi, Ω désignera dans la suite un *univers fini*, c'est-à-dire un ensemble **fini** non vide. Cette contrainte est uniquement technique, le cas des univers infinis nécessitant un peu plus de précautions. Du fait de cette contrainte, il nous sera par exemple impossible :

- de jouer à pile ou face indéfiniment et de s'intéresser au rang d'apparition du premier pile ;
- d'étudier la durée de vie d'un appareil électrique.

La première expérience relève des probabilités dîtes *discrètes*, lorsque l'univers Ω est dénombrable (en bijection avec $\mathbb{N}$), au programme de deuxième année. La seconde entre dans le cadre des *probabilités continues* et est hors programme en classes préparatoires : exit donc les variables à densités, et les lois exponentielles, normales, ...

Dans toute la suite, on considère un **univers fini Ω fixé**.

Définition.

- On appelle *événement* toute partie de l'univers Ω, c'est-à-dire tout élément de $\mathscr{P}(\Omega)$.
- L'événement $\emptyset$ est appelé *événement impossible* tandis que Ω est appelé *événement certain*.
- Un singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, est appelé un *événement élémentaire*.

Exemples.

- Lorsqu'on lance un dé, l'événement « obtenir un nombre pair » est $\{2, 4, 6\}$.
- Lorsqu'on lance deux dés, l'événement « la somme des dés vaut 6 » est $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.

Définition.

Soient A et B deux événements de Ω. Alors :

- l'*événement contraire* de A est le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$;
- l'*union des événements* A et B est l'ensemble $A \cup B$, noté « A ou B » ;
- l'*intersection des événements* A et B est l'ensemble $A \cap B$, noté « A et B ».

Lorsque $A \subset B$, on dit que l'événement A *implique* l'événement B ou encore que A *entraîne* B.

Exercice 1 Considérons une urne, qui contient a boules blanches et b boules noires. On tire n boules de cette urne, avec remise entre les tirages. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons B_i (resp. N_i) l'événement « la i-ème boule tirée est blanche (resp. noire) ».

1. Déterminer l'univers Ω modélisant cette expérience, et décrire l'événement B_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
2. Identifier les événements $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} B_i$, $\displaystyle\overline{\bigcap_{i=1}^{n} B_i}$, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \cap B_{i+1}$, $\displaystyle\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \cap B_{i+1}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} N_i \cap N_{i+1}\right)}$.

Définition.

- Deux événements A et B sont dits *incompatibles* ou *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.
- Soit $k \geq 3$. Des événements $A_1, \ldots, A_k$ sont dits *deux à deux incompatibles* si, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, k]\!]$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemples.

- Si A est un événement, alors A et $\overline{A}$ sont incompatibles.
- Les événements élémentaires $\{\omega\}$ pour $\omega \in \Omega$ sont deux à deux incompatibles.

1.2 Probabilités

Nous aimerions désormais, pour chaque événement, pouvoir parler de sa probabilité.

Définition.

On appelle probabilité sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour tout couple (A, B) d'événements :

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\textit{propriété d'additivité}).$$

On appelle *espace probabilisé fini* un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.

Remarque. Quand on lance un dé par exemple, c'est au moment de choisir la probabilité que l'on met sur $[\![1, 6]\!]$ que l'on décide si notre dé est équilibré ou non. Par exemple, dans le cas où le dé tombe toujours

sur 6, on utilisera la probabilité sur $\mathscr{P}([\![1,6]\!])$ définie par :

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } 6 \notin A \\ 1 & \text{si } 6 \in A \end{cases}.$$

Propriété 1 (Exemple de la probabilité uniforme)

On définit une probabilité sur Ω en posant pour tout événement A de Ω :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables (c'est-à-dire où } A \text{ est réalisé)}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On l'appelle la *probabilité uniforme* sur Ω. On dit aussi qu'on se trouve dans une situation d'*équiprobabilité*.

Mise en garde.

La formule $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ n'est valable que pour les **cas équiprobables**. Elle est valide par exemple dans le cas d'un dé équilibré, mais pas dans celui d'un dé truqué.

Exemple. La probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair » pour un dé équilibré est $P(A) = \dfrac{\text{Card}(\{2,4,6\})}{\text{Card}(\{1,2,3,4,5,6\})} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 On choisit au hasard une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\{-1,1\}$. Quelle est la probabilité qu'elle soit de rang 1 ?

Rédaction.

Si tel est le cas, on indiquera bien dès le début de l'exercice et avant tout calcul de probabilités qu'on est dans une situation d'équiprobabilité.

1.3 Premières règles de calcul d'une probabilité

Le calcul de la probabilité d'un événement A comporte généralement quatre étapes[1] :

- si cela n'a pas été fait dans l'énoncé, introduire des événements « de base » issus de l'expérience décrite, c'est-à-dire des événements dont la réalisation est « simple à énoncer » et qui permettront de décrire tous les autres événements. On choisira pour cela des notations judicieuses (par exemple en numérotant ces événements s'ils sont liés à la répétition d'une même expérience) ;
- décrire à l'aide d'une phrase l'événement A : « A est réalisé si, et seulement si, ... ». Il s'agit d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de réalisation de l'événement A faisant intervenir les événements de base ;
- donner une traduction ensembliste de cette phrase, en exprimant A à l'aide d'unions, d'intersections ou de complémentaires des événements de base ;
- calculer la probabilité $P(A)$ en s'appuyant sur l'expression ensembliste de A, à partir des règles de calcul de probabilité que nous allons donner dans la suite de ce chapitre.

[1] Les situations étant très variées dans la pratique, on pourra être amené à s'écarter légèrement de la voie tracée ci-dessous.

Propriété 2 (d'une probabilité)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

(1) $P(\Omega) = 1$ et $P(\varnothing) = 0$.

(2) *Événements contraires :* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(3) *Différence d'événements :* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

(4) *Croissance :* si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.

Propriété 3 (Probabilité d'une réunion)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

(1) Pour tout couple (A, B) d'événements de Ω :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(2) Pour tout k-uplet $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ d'événements de Ω :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \quad (\textit{sous-additivité}).$$

Si de plus les événements $A_1, \ldots, A_k$ sont deux à deux incompatibles, alors il y a égalité :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).$$

Exercice 3 Soient A, B, C des événements. Calculer $P(A \cup B \cup C)$.

Pour aller plus loin.

On peut montrer par récurrence la formule suivante (appelée *formule du crible de Poincaré*, hors programme) :

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{j=1}^{k} \left((-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k} \mathrm{Card}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_j}) \right).$$

1.4 Construction de probabilités

Propriété 4 (Construction d'une probabilité)

Soit $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ un univers fini et $p_1, \ldots, p_n$ des réels.
Il y a équivalence entre :

(1) il existe une probabilité P sur Ω telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$.

(2) les réels $p_1, \ldots, p_n$ sont positifs et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Une telle probabilité P est alors unique, et satisfait pour tout événement A de Ω :

$$P(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} p_i.$$

Exemples.

- Pour $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, il existe une unique probabilité P telle que :

  $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

  Elle satisfait pour tout événement A :

  $$P(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \text{tel que } \omega_i \in A}} \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

  Il s'agit de la probabilité uniforme.

- Pour $\Omega = [\![1, 6]\!]$, il existe une unique probabilité P permettant de simuler un lancer d'un dé qui tomberait sur 2, 4 ou 6 avec probabilité $\frac{1}{6}$, sur 1 ou 3 avec probabilité $\frac{1}{10}$ et sur 5 avec probabilité $\frac{3}{10}$.

2 Probabilités conditionnelles

Dans toute la suite, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

2.1 Définition

Définition.

Soient A et B deux événements, avec $P(B) \neq 0$.
On appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B* (c'est-à-dire sachant que B est réalisé), et on note $P_B(A)$, le quotient :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Mise en garde.

On pourra également rencontré la notation $P(A \mid B)$ pour la probabilité conditionnelle de A sachant B. Bien qu'elle figure dans le programme officiel, elle est trompeuse et peut laisser penser qu'il existe un événement $(A \mid B)$, qui serait « A sachant B ».

Un tel « événement conditionnel » n'existe pas, et ce qu'on aurait éventuellement envie d'appeler ainsi correspond bien souvent à $A \cap B$.

Propriété 5

Pour tout événement B tel que $P(B) \neq 0$, l'application

$$P_B : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω, appelée *probabilité conditionnelle à B*.

Remarque. Comme conséquence de ce résultat, toutes les règles de calcul sur les probabilités s'appliquent aussi pour P_B, par exemple $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$.

2.2 Formule des probabilités composées

Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$. On généralise ce résultat de la manière suivante.

Propriété 6 (*Formule des probabilités composées*)

Soient $k \geq 2$, et $A_1, \ldots, A_k$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \neq 0$. Alors[a] :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k).$$

[a] Toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies puisque $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) > 0$ et par croissance de la probabilité.

Méthode. Quand utilise-t-on la formule des probabilités composées ?

La formule des probabilités composées s'utilise lorsqu'on modélise des expériences successives telles que le résultat d'une expérience influe sur la suivante.

Exercice 4 On effectue des tirages sans remise dans une urne qui contient 2 boules rouges et $n-2$ boules vertes. Déterminer pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la probabilité de l'événement A_k : « la première boule rouge sort au k-ème tirage ».

2.3 Formules des probabilités totales

Définition.

On appelle *système complets d'événements* tout recouvrement de Ω, c'est-à-dire tout ensemble $\{A_1, \dots, A_k\}$ d'événements de Ω tel que :

- $A_1, \dots, A_k$ sont deux à deux incompatibles ;
- $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$.

Exemples.

- Pour tout événement $A \subset \Omega$, $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.
- $\{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$ est un système complet d'événements.

Propriété 7

Si $\{A_1, \dots, A_k\}$ est un système complet d'événements, alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(A_i) = 1$.

Théorème 8 (*Formules des probabilités totales*)

Soit $\{A_1, \dots, A_k\}$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B).$$

Si de plus, $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, alors :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Remarques.

- Il y a donc deux formules des probabilités totales, et on choisira l'une ou l'autre suivant que l'on connaisse $P(A_i \cap B)$ ou $P_{A_i}(B)$.
- Dans le cas particulier du système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$ où $0 < P(A) < 1$, les formules des probabilités totales deviennent :

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

Méthode. Quand utilise-t-on la formule des probabilités totales ?

On l'utilise lorsqu'une expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes : elle permet de raisonner par disjonction des cas, suivant le résultat de l'étape précédente, pour déterminer la probabilité à l'étape suivante.

Exercice 5 On dispose de n urnes ($n \geq 2$), numérotées de 1 à n, et telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numérotée par k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires. On choisit au hasard une urne et on en extrait une boule.
Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

Exercice 6 Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- s'il fonctionne à la date $n-1$, il a la probabilité a de toujours fonctionner à la date n,
- s'il est en passe à la date $n-1$, il a la probabilité b d'être encore en panne à la date n,

où (a, b) est un couple de réels de $]0, 1[$. On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'événement « l'appareil est en état de marche à la date n » et p_n la probabilité de M_n.

1. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de (p_n) ?

2.4 Formule de Bayes

Propriété 9 (*Formule de Bayes* (1702 - 1761))

- Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

- Si $\{A_1, \ldots, A_k\}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B de probabilité non nul et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$:

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{P(B)} \underset{\forall i \in [\![1,k]\!],\ P(A_i) \neq 0}{=} \frac{P(A_j)P_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$$

Méthode. Quand applique-t-on la formule de Bayes ?
Elle s'utilise pour des expériences aléatoires se déroulant en deux étapes. Elle permet de calculer la probabilité $P_B(A_j)$, c'est-à-dire la probabilité de A_j (étape 1) sachant B (étape 2). On l'appelle parfois la formule des causes puisqu'elle donne la probabilité d'une cause (étape 1) sachant la conséquence (étape 2).

Exercice 7 On reprend l'énoncé de l'**Exercice 5**. On choisit au hasard une urne dont on en extrait une boule. On constate que la boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de l'urne 1.

Exercice 8 On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de sorte que le côté pile a une probabilité d'apparition de $\frac{2}{3}$, et de deux urnes : l'urne A contient deux boules rouges et trois boules vertes et l'urne B contient trois boules rouges et deux boules bleues. On lance la pièce. On pioche alors successivement et avec remise deux boules dans l'urne A si le côté pile apparaît ou bien dans l'urne B si le côté face apparaît.

1. Soit E_k l'événement « on obtient exactement k boules rouges » pour chaque $k \in \{0, 1, 2\}$. Calculer $P(E_k)$.
2. Calculer la probabilité que les tirages aient été effectués dans l'urne A sachant qu'on a obtenu :
   (a) deux boules rouges ;
   (b) au moins une boule rouge.

3 Indépendance

Définition.

Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini (Ω, P) sont dits *indépendants* si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Mise en garde.

Attention à ne pas confondre incompatibilité et indépendance :

- l'incompatibilité est une notion intrinsèque aux événements : A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$ (ne dépend pas de la probabilité P).
- l'indépendance est une notion qui ne dépend pas de l'univers Ω, mais seulement de la probabilité P qu'on met dessus.

Remarque. La plupart du temps, l'indépendance se déduit de la situation. Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne donne pas d'information sur la réalisation de l'autre. Typiquement lors de plusieurs lancers d'une pièce ou d'un dé, ou lors de tirages successifs **avec remise**.

Propriété 10

Soient A et B des événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P).

- Supposons $P(A) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$.
- Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Définition.

Soient $A_1, \ldots, A_k$ des événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P).

- Les événements $A_1, \ldots, A_k$ sont dits *deux à deux indépendants* si pour tout couples (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, k]\!]$:
$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$
- Les événements $A_1, \ldots, A_k$ sont dits *mutuellement indépendants* si, pour tout $I \subset [\![1, k]\!]$:
$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Mise en garde.

Si des événements sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse. On retiendra que :

$$\boxed{\text{Indépendance mutuelle}} \quad \begin{array}{c}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{array} \quad \boxed{\text{Indépendance deux à deux}}$$

Exercice 9 On lance deux dés équilibrés. Notons A : « le numéro du premier dé est pair », B : « le numéro du second dé est pair » et C « la somme des deux dés est paire ». Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Propriété 11

Soient $A_1, \dots, A_k$ des événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P).

(1) Posons pour tout $i \in [\![1, k]\!]$:

$$B_i = A_i \quad \text{ou bien} \quad B_i = \bar{A}_i.$$

Alors :

$$A_1, \dots, A_k \text{ mut. indép. (resp. 2 à 2 indép.)} \quad \Leftrightarrow \quad B_1, \dots, B_k \text{ mut. indép. (resp. 2 à 2 indép.).}$$

(2) Supposons les événements $A_1, \dots, A_k$ mutuellement indépendants, et soit $i \in [\![1, k-1]\!]$.

Alors tout événement formé à partir de $A_1, \dots, A_i$ est indépendant de tout événement formé à partir de $A_{i+1}, \dots, A_k$.

4 Variables aléatoires

4.1 Définition

Définition.

Soit Ω un ensemble fini, et soit E un ensemble.

On appelle *variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E* toute application $X : \Omega \to E$.

Dans le cas où $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite *réelle*.

Exemples.

- On lance un dé à six faces 2 fois, ce qu'on modélise à l'aide de l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Les applications

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad M : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \max(x, y) \end{array}$$

  sont des variables aléatoires réelles, renvoyant respectivement la somme des deux lancers et le plus grand numéro obtenu.

  Par exemple, pour $\omega = (2, 5) \in \Omega$, $S(\omega) = 7$ et $T(\omega) = 5$.

- On tire simultanément 4 entiers entre 1 et 10. On peut choisir pour univers Ω l'ensemble $\mathscr{P}_4([\![1,10]\!])$ des 4-combinaisons de $[\![1,10]\!]$. L'application :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \min(\omega) \end{array}$$

  est une variable aléatoire réelle, renvoyant le plus petit entier tiré.

  Par exemple, pour $\omega = \{2,5,6,8\} \in \Omega$, $X(\omega) = 2$.

- On effectue deux tirages sans remise dans une urne qui contient trois boules rouges, deux blanches. On peut modéliser cette expérience par l'univers $\Omega = \{R,B\}^2$. L'application C à valeurs dans $\{R,B\}$ qui donne la couleur de la seconde boule est une variable aléatoire non réelle.

Définition.

Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire, alors son image $X(\Omega) = \{X(\omega),\ \omega \in \Omega\}$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X, est appelée le *support de* X. C'est un sous-ensemble fini de E (puisque Ω est supposé fini).

Exemples. Pour les exemples précédents, $S(\Omega) = [\![2,12]\!]$, $M(\Omega) = [\![1,6]\!]$, $X(\Omega) = [\![1,7]\!]$, $C(\Omega) = \{R,B\}$.

✎ **Notation.**

- Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, on note $[X \in A]$ (ou $(X \in A)$) l'événement défini par :

$$[X \in A] = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$

  Lorsque $A = \{a\}$, on note plus simplement $[X = a]$ (ou $(X = a)$) au lieu de $[X \in \{a\}]$.

- Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle, on note pour tout $a \in \mathbb{R}$, $[X \leq a]$ (ou $(X \leq a)$) l'événement défini par :

$$[X \leq a] = [X \in]-\infty, a]] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}.$$

  De même, on définit les événements $[X < a]$, $[X \geq a]$, $[X > a]$, $[a \leq X \leq b]$, ...

Exemples. Toujours avec les notations des exemples précédents :

$$[S > 10] = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}, \quad [M \leq 6] = \Omega, \quad [X \geq 7] = [X = 7] = \{\{7,8,9,10\}\}.$$

4.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
On appelle *loi de* X, et on note P_X, l'application :

$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) = P(X^{-1}(A)) \end{array}.$$

Propriété 12

La loi P_X de X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Propriété 13

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur (Ω, P) à valeurs dans E.

(1) La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements de Ω. En particulier :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1.$$

(2) Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$:

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

Corollaire 14

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). Alors la loi de X est entièrement déterminée par la donnée :

- du support $X(\Omega)$ de X ;
- des $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Méthode. Comment déterminer la loi d'une variable aléatoire ?

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X, on n'explicitera pas la probabilité P_X, mais on se contentera de déterminer :

- *son support $X(\Omega)$;*
- *les probabilités $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.*

Exercice 10 On tire simultanément 4 entiers entre 1 et 10, et on note X le plus petit entier tiré. Déterminer la loi de la variable X.

Propriété 15 (Caractérisation d'une loi de probabilité)

Soient $n \geq 1$, et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments deux à deux distincts d'un ensemble E. Considérons $(p_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de réels satisfaisant :

- $p_k \geq 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$;
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Alors la famille (p_k) est une *loi de probabilité* : il existe un espace probabilisé fini (Ω, P) et une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ tels que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ et } P(X = x_k) = p_k \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!].$$

Exercice 11 À quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(X = i) = \lambda i$?

Remarque. Cette propriété nous dispense de nous interroger sur l'espace probabilisé (Ω, P) de départ lorsqu'on définit une variable aléatoire X : un tel espace existe, mais il ne sera pas nécessaire en général de l'expliciter. Seule la loi de X est nécessaire pour calculer les probabilités $P(X \in A)$ pour $A \subset X(\Omega)$.

La connaissance de l'univers Ω n'a véritablement d'intérêt que dans les cas où on peut faire du dénombrement, c'est-à-dire quand il y a équiprobabilité.

Définition.

Soient X et Y deux variables à valeurs dans un ensemble E, non nécessairement définies sur le même espace probabilisé.

On dit que X et Y sont *identiquement distribuées* ou *de même loi*, et on note $X \sim Y$, si $P_X = P_Y$.

Remarque. Dire que $X : (\Omega_1, P_1) \to E$ et $Y : (\Omega_2, P_2) \to E$ sont identiquement distribuées, c'est dire que $X(\Omega_1) = Y(\Omega_2)$ et que pour tout $x \in X(\Omega_1)$, $P_1(X = x) = P_2(Y = x)$.

Mise en garde.

Deux variables définies sur un même espace et de même loi ne sont pas égales pour autant.

Par exemple pour le lancer de deux dés équilibrés, et notons X le résultat du premier dé, et Y le résultat du second. Alors X et Y ont même loi, mais ne sont pas égales, par exemple car $X(1, 2) = 1$ alors que $Y(1, 2) = 2$.

Propriété 16

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, E et F des ensembles, $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$ une application.

Alors $f \circ X : (\Omega, P) \to F$ est une variable aléatoire, notée $f(X)$, de loi donnée par $f(X)(\Omega) = f(X(\Omega))$ et :

$$\forall y \in f(X(\Omega)), \quad P(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} P(X = x).$$

Propriété 17

Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans le même ensemble E, et $f : E \to F$ une application de E dans un ensemble F.

Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Exercice 12 Soit X une variable à valeurs dans $[\![1, 2n]\!]$ telle que $P(X = i) = \dfrac{1}{2n}$ pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$. Quelle est la loi de $Y = (-1)^X$?

4.3 Lois usuelles

Variable certaine

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, P) \to E$ suit *la loi certaine égale à* $a \in E$ si $a \in X(\Omega)$ et $P(X = a) = 1$.

Loi uniforme

Définition.

Soit E un ensemble fini. On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, P) \to E$ suit *la loi uniforme sur* E, et on note $X \sim \mathscr{U}(E)$, si $X(\Omega) = E$ et :

$$\forall x \in E, \quad P(X = x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(E)}.$$

Cas particuliers. Dans le cas où $E = [\![a, b]\!]$ avec $a < b$ deux entiers relatifs, alors si $X \sim \mathscr{U}([\![a, b]\!])$, $P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$ pour tout $k \in [\![a, b]\!]$. En particulier, si $X \sim \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, alors $P(X = k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Exemple. Les lois uniformes se rencontrent lorsqu'on est en situation d'équiprobabilité. Par exemple :

- une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On pioche une boule au hasard et on note X le numéro de la boule piochée. Alors X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
- on lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu. Alors X suit la loi $\mathscr{U}([\![1, 6]\!])$.

Loi de Bernoulli

Définition.

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, P) \to \mathbb{R}$ suit la *loi de Bernoulli de paramètre* p, et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p.$$

Remarque. La situation type modélisée par une loi de Bernoulli est celle d'une expérience aléatoire à deux issues : succès avec probabilité $p \in [0, 1]$, échec avec probabilité $1 - p$. Une telle épreuve est appelée *épreuve de Bernoulli*. La variable aléatoire X égale à 1 en cas de succès et 0 sinon, suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

Exemples.

- On lance une pièce qui a une probabilité p de tomber sur pile. Soit X la variable aléatoire valant 1 si on tombe sur pile et 0 sinon. X suit la loi $\mathscr{B}(p)$.
- Soit une urne contenant a boules blanches et b boules noires. On note X la variable aléatoire égale à 1 si on a tiré une boule blanche et 0 si on tire une boule noire. X suit la loi $\mathscr{B}\left(\frac{a}{a+b}\right)$.

Remarque. Toute variable aléatoire qui ne prend que les valeurs 0 et 1 suit une loi de Bernoulli. En particulier, la variable indicatrice d'un événement A :

$$\mathbb{1}_A : \omega \in \Omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(\mathbb{1}_A = 1) = P(\{\omega \in A\}) = P(A)$.

Loi binomiale

Définition.

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire $X : (\Omega, P) \to \mathbb{R}$ suit la *loi binomiale de paramètres n et p*, et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ pour tout } k \in [\![0,n]\!].$$

Remarque. Lorsqu'on répète n fois une même épreuve de Bernoulli de manière **identique** et **indépendante**, alors la variable X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemples.

- On lance n fois une pièce qui a la probabilité $p \in [0,1]$ de tomber sur pile. Si X désigne le nombre de piles obtenus, alors X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
- On effectue n tirages **avec remise** dans une urne contenant a boules blanches et b boules noires. Alors la variable X égale au nombre de boules blanches obtenues suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$.
- Pour $n = 1$, la loi $\mathscr{B}(1,p)$ est la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

4.4 Indépendance de variables aléatoires

Définition.

Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires définies sur (Ω, P). On dit que X et Y sont *indépendantes*, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si pour tous $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(F)$, les événements $[X \in A]$ et $[Y \in B]$ sont indépendants :

$$P([X \in A] \cap [Y \in B]) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Propriété 18

Deux variables aléatoires X et Y sur (Ω, P) sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants :

$$P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y).$$

Remarque. La plupart du temps l'indépendance de deux variables aléatoires X et Y, si elle n'est pas déjà supposée dans l'énoncé, résulte directement de l'expérience aléatoire. Par exemple dans le cas d'un tirage avec remise dans une urne, si X est le numéro de la première boule tirée et Y celui de la seconde, alors les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 13 On tire deux boules sans remise dans une urne qui en contient n, numérotées de 1 à n. On note X le numéro de la première et Y le numéro de la seconde. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Propriété 19 (Image de variables aléatoires indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, $f : X(\Omega) \to E$ et $g : Y(\Omega) \to F$ deux applications. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Définition.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur (Ω, P) à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$ respectivement.

- Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont dites *deux à deux indépendantes* si pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, X_i et X_j sont indépendantes.
- Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont dites *mutuellement indépendantes* si, pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \cdots \times \mathscr{P}(X_n(\Omega))$:

$$P([X_1 \in A_1] \cap \cdots \cap [X_n \in A_n]) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

Remarque. En fixant certains A_i à $X_i(\Omega)$, on constate que si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi. En particulier, les X_i sont deux à deux indépendantes. Attention, **la réciproque est fausse** : l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

Propriété 20

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur (Ω, P). Alors $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad P\left([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i = x_i\right).$$

Propriété 21

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur (Ω, P), et soient $f_1, \dots, f_n$ des applications telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i soit définie sur $X_i(\Omega)$.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes (resp. deux à deux indépendantes), alors les variables $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes (resp. deux à deux indépendantes).

Propriété 22 (Lemme des coalitions)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur (Ω, P). Soient $m \in [\![1, n-1]\!]$, E et F deux ensembles, $f : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_m(\Omega) \to E$ et $g : X_{m+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \to F$ deux applications. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors les coalitions $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque. Cet énoncé se généralise sans difficulté au cas d'un nombre fini quelconque de coalitions.

Exemple. Si $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ sont mutuellement indépendantes, alors $\left(X_3, X_1 + X_5, X_2^2 e^{X_4}\right)$ sont encore mutuellement indépendantes. En revanche, on ne peut rien dire de l'indépendance éventuelle de $(X_3, X_1 + X_3, X_1 X_2)$, puisque X_3 figure dans deux des trois variables, de même que X_1 (les « paquets » ne sont pas disjoints).