Chapitre 3

Rappels et compléments calculatoires en analyse

1 Ensembles de nombres **2**

1.1 Notations usuelles 2

1.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ 2

1.3 Intervalles 4

1.4 Parties de $\mathbb{R}$ majorées, minorées, bornées 4

2 Rappels et compléments calculatoires **5**

2.1 Puissances, racine carrée 5

2.2 Valeur absolue 6

2.3 Partie entière 8

2.4 Factorisation de fonctions polynomiales . 9

3 Résolution d'équations et d'inéquations **10**

3.1 Égalités et équations 10

3.2 Inégalités et inéquations 11

Compétences attendues.

- ✓ Manipuler sans erreur une égalité et une inégalité.
- ✓ Montrer qu'une partie est majorée, minorée ou bornée.
- ✓ Savoir manipuler des puissances, racines carrées, valeurs absolues et parties entières.
- ✓ Résoudre une équation ou une inéquation (à l'aide d'une factorisation, d'une étude de fonction, . . .)

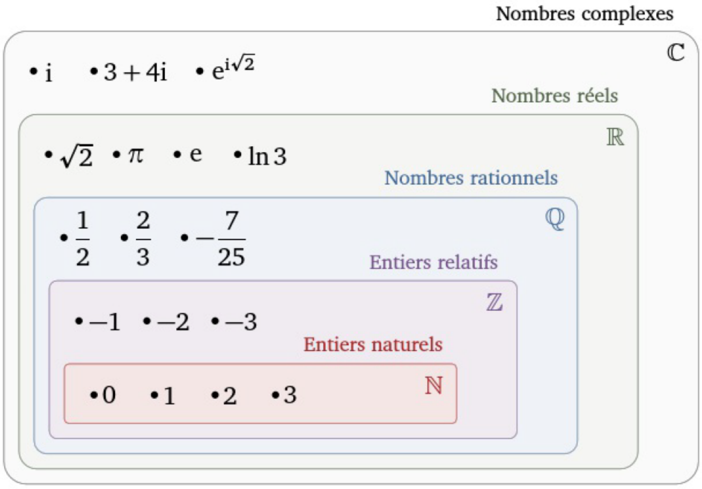
Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Ensembles de nombres

1.1 Notations usuelles

Nous utiliserons toute l'année les notations usuelles pour les ensembles de nombres :

- $\mathbb{N}$ pour l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ pour l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ pour l'ensemble des rationnels, $\mathbb{R}$ pour l'ensemble des réels et enfin $\mathbb{C}$ pour l'ensemble des complexes.
- $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ désignent les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ privés de 0.
- $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}_-$ celui des réels négatifs ou nuls.
- $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}_-^*$ celui des réels strictement négatifs.



Nous supposons que ces ensembles de nombres et leurs propriétés élémentaires sont connus et nous ne les définirons rigoureusement (ce qui n'est pas chose facile. . .) à aucun moment. On s'intéresse dans ce chapitre plus particulièrement à l'ensemble des nombres réels.

Le saviez-vous ?
Ces notations ont été popularisées dans les années 1930 par Nicolas Bourbaki, pseudonyme derrière lequel se cache un groupe de mathématiciens français. L'emploi de la lettre $\mathbb{Z}$ pour les entiers vient de l'allemand Zahlen (nombres) et le $\mathbb{Q}$ pour les rationnels de « quotient » (puisqu'un rationnel est un quotient d'entiers).

1.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Propriété 1

$\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ qui est une *relation d'ordre total*, c'est-à-dire qu'elle possède les propriétés suivantes :

(1) *Réflexivité :* $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$.

(2) *Antisymétrie :* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y$.

(3) *Transitivité :* $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$.

(4) Elle est *totale* : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Notation.
Soient a et b deux réels. Si $a \leq b$ et que $a \neq b$, on note $a < b$ (ou $b > a$).

Danger.

Plus question de confondre inégalités **strictes** et inégalités **larges** :

Si $a < b$, alors $a \leq b$, mais **la réciproque est fausse** !

On rappelle sans preuve des propriétés élémentaires de cette relation d'ordre.

Propriété 2 (Compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition et la multiplication)

Soient a, b, c, d des nombres réels.

(1) $a \leq b$ équivaut à $a + c \leq b + c$.

(2) Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

(3) Pour tout $c < 0$, $a \leq b$ équivaut à $ac \geq bc$.

(4) Pour tout $c > 0$, $a \leq b$ équivaut à $ac \leq bc$.

(5) Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

(6) Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ ou $a, b \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Danger.

On ne soustraie pas des inégalités : $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \;\not\Rightarrow\; a - c \leq b - d$.

On pourra s'en convaincre par exemple avec les inégalités $0 \leq 1$ et $0 \leq 2$.

Par contre : $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \;\Rightarrow\; (a \leq b \text{ et } -d \leq -c) \;\Rightarrow\; a - d \leq b - c$.

Exercice 1 Montrer que pour tous $x, y \in [0, 1[$ tels que $x \leq y$, $\dfrac{x}{1-x} \leq \dfrac{y}{1-y}$.

Exercice 2 Résoudre l'inégalité $\dfrac{x-1}{x+3} < 2$.

Terminons cette section avec une propriété que nous utiliserons régulièrement.

Propriété 3 (✎)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels **positifs**. Alors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Remarque. Cette propriété reste valable si les x_i sont tous négatifs, mais pas s'ils ne sont pas tous de même signes, comme le montre l'exemple $3 + (-1) + (-2) = 0$.

1.3 Intervalles

Définition.

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un *intervalle de* $\mathbb{R}$ dans les quatre cas suivants :

- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$.
  Dans ce cas, on parle plus précisément d'*intervalle ouvert*, et on note $I =]a, b[$.
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \times \mathbb{R}$.
  On parle d'*intervalle semi-ouvert à gauche*, et on note $I =]a, b]$.
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$, et on note $I = [a, b[$.
  On parle d'*intervalle semi-ouvert à droite*, et on note $I =]a, b]$.
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  On parle de *segment*, et on note $I = [a, b]$.

De tels éléments a et b sont appelés les *bornes de l'intervalle* I. Elles peuvent ou non appartenir à I.

Remarque. $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ suivant cette définition, de même que les singletons $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

✎ **Notation.**

On utilisera souvent la notation avec doubles crochets pour désigner les intervalles d'entiers : si a et b sont deux entiers relatifs avec $a \leq b$, on note

$$[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}.$$

On retiendra que $\mathrm{Card}\,([\![a, b]\!]) = b - a + 1$.

1.4 Parties de $\mathbb{R}$ majorées, minorées, bornées

Définition.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- A est *majorée* si : $\quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M$.
  Si A est majorée, on appelle *majorant* de A tout réel M satisfaisant : $\quad \forall x \in A,\ x \leq M$.
- A est *minorée* si : $\quad \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geq m$.
  Si A est minorée, on appelle *minorant* de A tout réel m satisfaisant : $\quad \forall x \in A,\ x \geq m$.
- A est *bornée* lorsque A est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire :

$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leq x \leq M.$$

Remarque. Si A est une partie majorée de $\mathbb{R}$, alors elle possède une infinité de majorants. En effet, si M est un majorant de A, alors tout réel $M' \geq M$ en est aussi un puisque :

$$\forall x \in A,\ x \leq M \leq M'.$$

Et donc, tous les éléments de $[M, +\infty[$ sont encore des majorants de A. On prendra donc soin de parler d'**un** majorant de A et non **du** majorant de A.

Exemple. Les intervalles bornés de $\mathbb{R}$ sont ceux de la forme $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$ avec a et b des réels tels que $a \leq b$. Les intervalles majorés de $\mathbb{R}$ sont les intervalles bornés et ceux de la forme $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 4 (✎)

- Si A est majorée et possède un majorant qui est dans A, alors celui-ci est unique.
  Un tel élément, s'il existe, s'appelle *maximum* de A et on le note $\max(A)$.
- Si A est minorée et possède un minorant qui est dans A, alors celui-ci est unique.
  Un tel élément, s'il existe, s'appelle *minimum* de A et on le note $\min(A)$.

Exemple. Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est une partie finie, alors A admet pour maximum $\max(a_1, \ldots, a_n)$ et pour minimum $\min(a_1, \ldots, a_n)$.

Exercice 3 Déterminer si les parties suivantes sont majorées, minorées, bornées, en donnant le cas échéant un exemple de majorant, de minorant, le maximum et le minimum s'ils existent.

$$A = \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad B = [0, 1[\quad ; \quad C = \mathbb{Z} \quad ; \quad D = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

2 Rappels et compléments calculatoires

2.1 Puissances, racine carrée

Définition.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Si x est non nul, et si n est un entier strictement négatif, alors on note :

$$x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}}.$$

Remarque. En particulier, on notera que par définition $0^n = 0$ pour tout $n \geq 1$, et $0^0 = 1$.

Propriété 5

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$:

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n, \quad x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m \quad \text{et} \quad (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

Si de plus, x et y sont non nuls, alors ces formules restent valables pour m, n dans $\mathbb{Z}$.

Danger.

La puissance $n^{\text{ème}}$ n'est pas compatible avec la somme : en général, $(x+y)^n \neq x^n + y^n$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $u_n = \dfrac{3 \cdot 16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n - (-2)^{3n+2}}$.

Définition.

Si $x \geq 0$, alors on note $\sqrt{x}$ et on appelle *racine carrée de* x l'unique réel positif dont le carré vaut x.

Mise en garde.

La quantité $(\sqrt{a})^2$ n'est définie **que si** $a \geq 0$, et par définition de la racine carrée, $(\sqrt{a})^2 = a$.
D'autre part, on n'a pas $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$, mais :

$$x^2 = a \Leftrightarrow (x = \sqrt{a} \textbf{ ou } x = -\sqrt{a}).$$

Propriété 6 (✎)

Pour tous x, y positifs, $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$, et si $y \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Danger.

En revanche, on n'a pas en général $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$!

Astuce.

Un moyen souvent pratique de simplifier une expression contenant une somme ou une différence de racines est de faire apparaître la quantité conjuguée, où la quantité conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (et vice-versa).

Exercice 5 Simplifier l'expression $A = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} - 8\sqrt{5}$.

2.2 Valeur absolue

Définition.

Soit $a \in \mathbb{R}$. La *valeur absolue de* a est le réel positif noté $|a|$ défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Propriété 7 ()

Soient a et b deux réels. Alors :

(1) $a \leq |a|$.

(2) $|a|^2 = a^2$ et donc $|a| = \sqrt{a^2}$.

(3) $|a \times b| = |a| \times |b|$.

(4) Si $b \neq 0$, alors $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

(5) $|a| = |b| \Leftrightarrow (a = b$ **ou** $a = -b)$.

(6) Si $b \geq 0$, alors $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$ et $|a| \geq b \Leftrightarrow (a \geq b$ **ou** $a \leq -b)$.
Ces inégalités restent valables si on remplace inégalités larges par inégalités strictes.

Exercice 6 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression de $|x-3| - |x+2|$ qui ne fasse apparaitre aucune valeur absolue.

Astuce.

Lorsqu'on souhaite se défaire d'une valeur absolue, on pensera à faire une disjonction de cas en se plaçant sur des intervalles sur lesquels l'expression prise en valeur absolue est de signe constant.
Dans le cas où plusieurs valeurs absolues interviennent, on pourra dresser un tableau de signe pour faciliter l'étude.

Propriété 8 (Intervalles et valeur absolue)

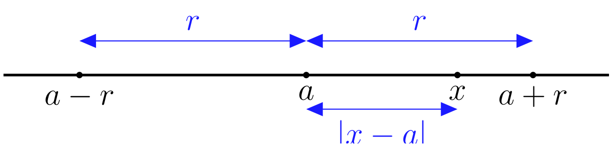
Soient a un réel quelconque et r un réel strictement positif. Alors :

(1) $|x-a| \leq r$ est équivalent à $x \in [a-r, a+r]$.

(2) $|x-a| \geq r$ est équivalent à $x \in \,]-\infty, a-r]$ ou $x \in [a+r, +\infty[$.

Ces propriétés sont encore vraies en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes et les intervalles fermés par des intervalles ouverts.

Interprétation géométrique. Si a et x sont deux réels, $|x-a|$ est la *distance* de a à x. Si $r \geq 0$, l'inégalité $|x-a| \leq r$ signifie que x est à une distance de a inférieure ou égale à r.



Propriété 9 (Première inégalité triangulaire -)

Soient a et b deux réels. Alors :
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$
De plus, $|a+b| = |a| + |b|$ si, et seulement si, a et b sont de même signe.

Corollaire 10 (Deuxième inégalité triangulaire - ✎)

Soient a et b deux réels. Alors :
$$||a| - |b|| \leq |a + b|.$$

Corollaire 11 (Inégalité triangulaire généralisée - ✎)

Soit un entier $n \geq 2$. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n réels, alors :

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

De plus, il y a égalité $|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ si, et seulement si, tous les x_i sont de même signe.

Propriété 12 (✎)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors :

$$A \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ |x| \leq K.$$

2.3 Partie entière

Propriété 13

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n \leq x < n + 1.$$

Cet entier est alors noté $\lfloor x \rfloor$ et appelé *partie entière de x*.

Ce résultat sera démontré plus tard dans l'année.

Exercice 7 Compléter :

$$\lfloor 0 \rfloor = \qquad , \ \lfloor 2,5 \rfloor = \qquad , \ \lfloor \pi \rfloor = \qquad , \ \lfloor -\pi \rfloor =$$

Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $n \leq x \Leftrightarrow n \leq \lfloor x \rfloor$. Par conséquent, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Astuce.

On retiendra bien les inégalités définissant la partie entière d'un réel x :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Elles sont en effet très utiles en pratiques puisqu'elles permettent dans beaucoup de situations de se défaire de la partie entière. Il faut donc parfaitement les connaître et penser à s'y ramener.

Exercice 8 Résoudre l'équation $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Mise en garde.

Contrairement à ce que peut laisser peut-être penser ce dernier exercice, il n'existe aucune règle générale pour la partie entière d'une somme, ni pour un produit ou un quotient :

$$\lfloor a+b \rfloor \neq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor, \quad \lfloor ab \rfloor \neq \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor \text{ ou } \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \neq \frac{\lfloor a \rfloor}{\lfloor b \rfloor}.$$

2.4 Factorisation de fonctions polynomiales

Définition.

Une *fonction polynomiale* est une fonction f de la forme $f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels, qui sont appelés les *coefficients de* f de degré 0, de degré 1, $\ldots$, de degré n.

Si $a_n \neq 0$, on dit que f *est de degré* n.

On appelle *racine de* f tout réel x vérifiant $f(x) = 0$.

Remarque. Vous savez très bien étudier les fonctions polynomiales de degré 1, qui sont les fonctions affines, mais également les fonctions polynomiales de degré 2. Vous savez notamment en dresser le tableau de variations, le tableau de signe, et en trouver les racines.

L'étude et la recherche des racines pour des fonctions polynomiales de degré plus grandes que trois est plus difficile et sera l'objet d'un prochain chapitre. Donnons cependant tout de suite un premier résultat (admis provisoirement), qui sera bien utile quand il s'agira de résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des fonctions polynomiales.

Propriété 14

Soit f une fonction polynomiale de degré $n \geq 1$. Si α est racine de f, alors il existe une fonction polynomiale g de degré $(n-1)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (x - \alpha) \times g(x).$$

Exercice 10 Déterminer les solutions réelles de l'équation $2x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 18x + 6$.

Méthode. Racines évidentes pour une équation polynomiale.
Pour factoriser une fonction polynomiale de degré 3 ou plus, on commencera par chercher une racine « évidente », généralement parmi -2, -1, 0, 1, 2. Si on en trouve une, on pourra alors factoriser pour faire apparaître une fonction polynomiale de degré moins élevé.

3 Résolution d'équations et d'inéquations

3.1 Égalités et équations

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est déterminer l'ensemble (généralement noté $\mathscr{S}$) des valeurs de l'inconnue x satisfaisant l'équation. Autrement dit, on veut avoir l'équivalence : « x satisfait l'équation » $\Leftrightarrow x \in \mathscr{S}$.
Cela signifie que $\mathscr{S}$ doit contenir **toutes** les solutions de l'équation, **et rien d'autre**.

Méthode. Résolution d'une équation.
Pour résoudre une équation, deux possibilités s'offrent à nous :

- *on peut raisonner en deux temps :*
  - *on suppose que la variable x est solution de l'équation, et on en déduit des conditions nécessaires sur x (on restreint ainsi le champ des possibles) ;*
  - *on considère un élément x satisfaisant ces conditions nécessaires. On vérifie qu'il est solution (ou non) l'équation.*

  Ce qui revient à effectuer une Analyse - Synthèse.
- *on procède directement par équivalence. Cela nécessite cependant de s'interroger à chaque étape sur la conservation de l'équivalence (pour le sens direct **et** réciproque).*

Exercice 11 Résoudre l'équation $x - 2 = \sqrt{x + 10}$.

Rédaction.
On commencera toujours la résolution d'une équation (ou d'une inéquation) par la recherche du domaine de validité de l'équation, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles l'équation a un sens.

Exercice 12 Résoudre l'équation $2\ln(x) + \ln(2x + 5) = \ln(2 - x)$.

Danger.
Attention aux simplifications trop hâtives :

$$ax = ay \not\Longrightarrow x = y, \qquad a^2 = b^2 \not\Longrightarrow a = b.$$

Méthode. Simplification vs factorisation.
Lors de la résolution d'une équation, on se méfiera les simplifications trop rapides, et on essayera en priorité de ***factoriser*** *dès que possible les expressions afin d'exploiter le résultat :*

> *Un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs est nul.*

Ainsi :

$$ax = ay \quad \Leftrightarrow \quad a(x-y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \ \text{ ou } \ x = y$$

et :

$$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)(a-b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -b \ \text{ ou } \ a = b.$$

3.2 Inégalités et inéquations

Méthode. Obtention d'inégalités.
Pour prouver une inégalité qui nous a été donnée, on peut :

- *procéder par équivalence et se ramener à une inégalité trivialement satisfaite ;*
- *tout passer du même côté et essayer de factoriser pour déterminer le signe (à l'aide d'un tableau de signe éventuellement) ;*
- *tout passer du même côté et étudier le signe de la fonction obtenue grâce à l'étude de ses variations.*

Exercice 13 Prouver que pour tous réels x, y, $\quad |xy| \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

Exercice 14 Résoudre l'inéquation $|x-2| < \dfrac{3}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 15 Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Méthode. Majorer ou minorer une expression.
Pour majorer une expression, on pourra :

- *pour une somme, majorer les termes qu'on ajoute, minorer les termes qu'on retranche ;*
- *pour un produit de termes positifs, majorer chacun des facteurs ;*
- *pour un quotient de termes positifs, majorer le numérateur et minorer le dénominateur.*

Selon les cas et la précision de la majoration souhaitée, on pourra :

- *utiliser des inégalités classiques (inégalités triangulaires, inégalité du collège, ...) ;*
- *procéder à une étude de fonction.*

On procèdera de manière analogue pour obtenir une minoration.

Exercice 16 Encadrer l'expression $x(1-x)$ pour $x \in [0,1]$.

Exercice 17 Encadrer l'expression $\dfrac{x+1+\cos(x)}{x^2-x+2}$ pour $x \in [1,2]$.