

# Déterminant

<b>1 Formes multilinéaires alternées</b>	<b>3</b>
1.1 Applications multilinéaires . . . . .	3
1.2 Formes alternées, formes antisymétriques	4
1.3 Formes $n$ -linéaires alternées en dimension $n$	5
<b>2 Déterminant d'une famille de vecteurs</b>	<b>5</b>
2.1 Définition . . . . .	5
2.2 Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs . . . . .	6
<b>3 Déterminant d'un endomorphisme</b>	<b>6</b>
3.1 Définition et exemples . . . . .	6
3.2 Propriétés du déterminant d'un endomor- phisme . . . . .	7
<b>4 Déterminant d'une matrice carrée</b>	<b>8</b>
4.1 Définition . . . . .	8
4.2 Propriétés du déterminant d'une matrice	9
<b>5 Calculs de déterminants</b>	<b>10</b>
5.1 Déterminant d'une matrice triangulaire .	10
5.2 Opérations élémentaires . . . . .	11
5.3 Développement suivant une ligne ou une colonne . . . . .	11
5.4 Exemples de calculs de déterminants . .	13
<b>6 Applications</b>	<b>14</b>
6.1 Comatrice . . . . .	14
6.2 Rang d'une matrice . . . . .	15

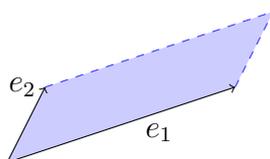
## Compétences attendues.

- ✓ Calculer le déterminant d'une matrice par opérations élémentaires ou développement par rapport à une ligne ou une colonne.
- ✓ Calculer le déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme.
- ✓ Utiliser un calcul de déterminant pour caractériser une base ou une propriété d'inversibilité.

## Motivations géométriques

Cette partie a pour but de motiver géométriquement l'introduction du déterminant. Le but est de se forger une intuition, quitte à faire des concessions sur la rigueur, et nous allons donc y parler d'aire et d'orientation sans définir du tout ce que nous entendons par là.

La formalisation de la notion intuitive d'aire dans le plan n'est pas triviale, et nous ne considérerons dans la suite que des aires de parallélogrammes. Le point de départ est la donnée d'une « unité d'aire orientée » du plan, c'est-à-dire le choix arbitraire d'un parallélogramme orienté, ou en d'autres termes d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  du plan.



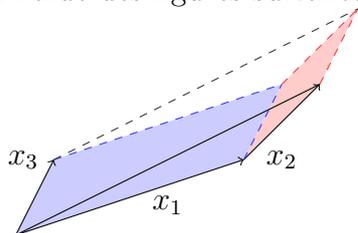
À partir de cette brique élémentaire, nous pouvons donner une aire à n'importe quel parallélogramme du plan. Nous noterons  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)$  l'aire orientée du parallélogramme engendré par une famille  $(x_1, x_2)$  de vecteurs dans le plan. L'indice  $\mathcal{B}$  indique que ces aires orientées sont calculées relativement à l'unité d'aire orientée que  $\mathcal{B}$  représente. Quant à l'orientation, elle signifie qu'on comptera cette aire positivement si  $(x_1, x_2)$  a même orientation<sup>1</sup> que  $(e_1, e_2)$ , négativement sinon.

On peut constater géométriquement les propriétés suivantes.

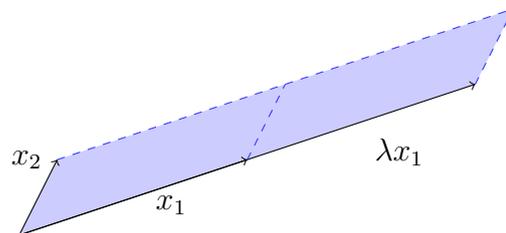
### Propriété 1

- $(x_1, x_2)$  est une base du plan si, et seulement si,  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) \neq 0$ .  
En d'autres termes, la colinéarité de deux vecteurs est caractérisée par le caractère aplati du parallélogramme qu'ils engendrent.
- $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = 1$  et  $\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_1) = -1$ .
- Le signe de  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)$  est changé lorsqu'on permute deux vecteurs.
- L'application  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)$  est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Ces différents points se comprennent bien géométriquement, sauf peut-être le dernier. On pourra s'en convaincre à l'aide des figures suivantes.



$$\det_{\mathcal{B}}(x_1 + x_2, x_3) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_3) + \det_{\mathcal{B}}(x_2, x_3).$$



$$\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1, x_2) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2).$$

À l'aide de ces propriétés de calculs, constatons que pour  $x_1 = ae_1 + be_2$  et  $x_2 = ce_1 + de_2$  :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) &= \det_{\mathcal{B}}(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = a \det_{\mathcal{B}}(e_1, ce_1 + de_2) + b \det_{\mathcal{B}}(e_2, ce_1 + de_2) \\ &= a \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_1)}_{=0} + ad \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2)}_{=1} + bc \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_1)}_{=-1} + bd \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_2)}_{=0} \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>C'est-à-dire si l'angle  $(x_1, x_2)$  a une mesure principale (dans  $] -\pi, \pi]$ ) de même signe que celle de  $(e_1, e_2)$ .



**Propriété 2**

Soit  $f : E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$  une application multilinéaire, et soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ .  
S'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $x_i = 0_{E_i}$ , alors  $f(x_1, \dots, x_n) = 0_F$ .

**Propriété 3**

L'ensemble  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n, F)$  des applications  $n$ -linéaires sur  $E_1 \times \cdots \times E_n$  à valeurs dans  $F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**1.2 Formes alternées, formes antisymétriques****Définition.**

Soit  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une forme  $n$ -linéaire. On dit que  $\varphi$  est *alternée* si pour tous  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et  $1 \leq i < j \leq n$  :

$$x_i = x_j \quad \Rightarrow \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Autrement dit,  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$  si deux des vecteurs sont égaux.

**Exemples.**

- Le produit scalaire dans le plan n'est pas alterné car  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \neq 0$  si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .
- L'application  $\det$  définie plus tôt sur  $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$  est alternée car  $\det((a, b), (a, b)) = ab - ab = 0$ .

**Propriété 4**

Soit  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une forme  $n$ -linéaire alternée. Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille liée de vecteurs de  $E$ , alors  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

**Définition.**

Soit  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une forme  $n$ -linéaire. On dit que  $\varphi$  est *antisymétrique* si pour tous  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et  $1 \leq i < j \leq n$  :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Autrement dit, on change le signe de  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  en transposant deux vecteurs.

**Propriété 5**

Soit  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une forme  $n$ -linéaire antisymétrique. Alors pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  :

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

**Propriété 6**

Soit  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une forme  $n$ -linéaire. Alors  $\varphi$  est antisymétrique si, et seulement si,  $\varphi$  est alternée.

**1.3 Formes  $n$ -linéaires alternées en dimension  $n$** **Théorème 7** (Formes  $n$ -linéaires alternées sur un espace de dimension  $n$ )

Soit  $E$  désigne un espace vectoriel de **dimension**  $n$  sur  $\mathbb{K}$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

- L'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  est une droite vectorielle.
- Il existe une unique forme  $n$ -linéaire alternée  $\varphi$  sur  $E$  telle que  $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$ .
- Si  $\psi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ , alors  $\psi = \lambda\varphi$  où  $\lambda = \psi(e_1, \dots, e_n)$ .

**2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base**

Soit toujours  $E$  un espace vectoriel de **dimension**  $n$  sur  $\mathbb{K}$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

**2.1 Définition****Définition.**

On appelle *déterminant dans la base  $\mathcal{B}$* , et on note  $\det_{\mathcal{B}}$  l'unique forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  telle que  $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

**Théorème 8** (Expression du déterminant dans une base)

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Notons  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = M_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ . Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

 **Notation.**

On utilisera la notation suivante, introduite par Cayley :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

### Cas particulier des déterminants en dimension 2 et 3.

- Si  $n = 2$ , alors en notant que  $\mathfrak{S}_2 = \{\text{id}, (1\ 2)\}$  :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

- Si  $n = 3$ , alors en notant que  $\mathfrak{S}_3 = \{\text{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$  :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}}_{\text{id}} + \underbrace{a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}}_{(1\ 2\ 3)} + \underbrace{a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}}_{(1\ 3\ 2)} - \underbrace{a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}}_{(1\ 2)} - \underbrace{a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}}_{(1\ 3)} - \underbrace{a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}}_{(2\ 3)}.$$

Autrement dit, « diagonales descendantes moins diagonales montantes » (*règle de Sarrus*).

**Interprétation géométrique.** Dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la base canonique  $\mathcal{B}$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)$  est l'aire orientée du parallélogramme formé par les vecteurs  $x_1$  et  $x_2$ . Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$  est le volume orienté du parallélépipède formé par les vecteurs  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .

## 2.2 Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs

### Propriété 9 (Formule de changement de bases)

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . Pour toute famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de  $E$  :

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

### Corollaire 10 (Caractérisation d'une base par le déterminant)

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$  si, et seulement si,  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

**Exercice 2** Montrer que  $((1, 2, 0), (2, 0, 1), (0, 1, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

## 3 Déterminant d'un endomorphisme

### 3.1 Définition et exemples

#### Propriété 11

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Pour toute base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , il existe un unique scalaire  $\lambda$  tel que :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

pour toute famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de  $E$ .

De plus,  $\lambda = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$  et  $\lambda$  est indépendant de la base  $\mathcal{B}$  de l'espace  $E$  choisie.

**Définition.**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

On appelle *déterminant de  $f$* , et on note  $\det(f)$ , le scalaire  $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$  où  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base quelconque de  $E$ . Pour toute famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de  $E$  :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

**Interprétation géométrique.** Un endomorphisme  $f$  agit donc sur les aires ou volumes orientés, ou leur analogue en dimension  $n$ , comme une homothétie de rapport  $\det(f)$ .

**Exercice 3** Calculer le déterminant des endomorphismes de  $E$  suivants :

- d'une homothétie vectorielle  $\lambda \text{id}_E$  où  $\lambda \in \mathbb{K}$  ;
- d'un projecteur  $p$  sur un sous-espace  $F$  parallèlement à  $G$ , où  $E = F \oplus G$  ;
- d'une symétrie  $s$  sur un sous-espace  $F$  parallèlement à  $G$ , où  $E = F \oplus G$ .

**3.2 Propriétés du déterminant d'un endomorphisme****Propriété 12** (Déterminant d'une composée)

Si  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , alors :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g).$$

**Propriété 13** (Caractérisation des automorphismes par le déterminant)

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .

Alors  $f$  est bijective si, et seulement si,  $\det(f) \neq 0$ . Et dans ce cas,  $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$ .

**Remarque.** Comme conséquence des résultats précédents, l'application déterminant  $f \mapsto \det(f)$  est un morphisme de groupes de  $(\text{GL}(E), \circ)$  dans  $(\mathbb{K}^*, \times)$ . Son noyau est un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$ , appelé le *groupe spécial linéaire de  $E$*  et noté  $\text{SL}(E)$ . Ainsi :

$$\text{SL}(E) = \{f \in \text{GL}(E) \mid \det(f) = 1\}.$$

Dit autrement, c'est l'ensemble des automorphismes de  $E$  qui préservent le volume orienté.

## 4 Déterminant d'une matrice carrée

### 4.1 Définition

#### Définition.

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice **carrée**. On appelle *déterminant de A*, et on note  $\det(A)$ , le scalaire :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}.$$

#### Notation.

On notera comme précédemment :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

#### Propriété 14

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Notons  $C_1(A), \dots, C_n(A) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  ses vecteurs colonnes. Alors :

- $\det(A) = \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}} (C_1(A), \dots, C_n(A))$  où  $\mathcal{B}_{\text{can}}$  désigne la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  ;
- l'application  $A \mapsto \det(A)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une forme  $n$ -linéaire alternée par rapport aux colonnes de  $A$ .

#### Corollaire 15

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

- (1)  $\det(I_n) = 1$  ;
- (2) Si une colonne de  $A$  est nulle, alors  $\det(A) = 0$  ;
- (3) Si deux colonnes de  $A$  sont égales, alors  $\det(A) = 0$  ;
- (4) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

#### Danger.

Attention, le déterminant n'est pas linéaire : on n'a pas en général  $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$  ou encore  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ .

**Propriété 16**

Soit  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  de base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

- Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  une famille de vecteurs de  $E$ . Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(M_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)).$$

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ . Alors :

$$\det(f) = \det(M_{\mathcal{B}}(f)).$$

**4.2 Propriétés du déterminant d'une matrice****Propriété 17 (Déterminant d'un produit)**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B).$$

**Corollaire 18**

Deux matrices semblables ont même déterminant.

** Mise en garde.**

Nous obtenons ici un nouvel invariant de similitude, en plus du rang et de la trace. Attention cependant, la réciproque est fautive : deux matrices ayant même rang, même trace et même déterminant ne sont pas forcément semblables, comme on peut le constater avec les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Théorème 19 (Caractérisation des matrices inversibles)**

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible si, et seulement si,  $\det(A) \neq 0$ .

Et dans ce cas,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

**Remarque.** Comme dans le cas des endomorphismes, on définit le *groupe spécial linéaire d'ordre  $n$* , noté  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ , par :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(\det) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}.$$

**Propriété 20**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\det(A) = \det(A^{\top})$ .

**Corollaire 21**

L'application  $A \mapsto \det(A)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une forme  $n$ -linéaire alternée par rapport aux lignes de  $A$ .

## 5 Calculs de déterminants

### 5.1 Déterminant d'une matrice triangulaire

**Propriété 22** (Déterminant d'une matrice triangulaire)

Soit  $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire (supérieure, inférieure ou diagonale). Alors :

$$\det(T) = t_{1,1}t_{2,2} \dots t_{n,n}.$$

**Propriété 23** (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)

Soient  $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C).$$

**Corollaire 24**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0_{k_2,k_1} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0_{k_p,k_1} & \cdots & 0_{k_p,k_{p-1}} & A_p \end{pmatrix}$$

avec  $A_1 \in \mathcal{M}_{k_1}(\mathbb{K}), \dots, A_p \in \mathcal{M}_{k_p}(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\det(A) = \det(A_1) \cdots \det(A_p).$$

**Exemple.** 
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 & 19 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \times 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \times 5 \times 6 = -240.$$

## 5.2 Opérations élémentaires

### Propriété 25 (Déterminant d'une matrice et opérations élémentaires)

Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- Les opérations élémentaires  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  et  $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$  ne modifient pas les déterminants.
- Les opérations élémentaires  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  et  $C_j \leftarrow \lambda C_j$  multiplient les déterminants par  $\lambda$ .
- Les opérations élémentaires  $L_i \leftrightarrow L_j$  et  $C_j \leftrightarrow C_i$  multiplient les déterminants par  $-1$ .

### Méthode. Calcul du déterminant d'une matrice par l'algorithme du pivot de Gauss.

Pour calculer le déterminant d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on pourra :

- appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener par opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes au calcul d'un déterminant d'une matrice triangulaire. On pensera pour cela :
  - à changer le signe lorsqu'on fait un échange de lignes ou de colonnes ;
  - à compenser en divisant à l'extérieur par  $\lambda$  lorsqu'on multiplie une ligne ou une colonne par  $\lambda$ .
- une fois ramené à une matrice triangulaire, on calcule son déterminant en effectuant le produit des coefficients diagonaux.

**Exercice 4** Calculer les déterminants de  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

## 5.3 Développement suivant une ligne ou une colonne

### Définition.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on appelle :

- mineur d'indice  $(i, j)$  de  $A$ , et on note  $\Delta_{i,j}(A)$ , le déterminant de la matrice extraite de  $A$  obtenue par suppression de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne ;
- cofacteur d'indice  $(i, j)$  de  $A$  le scalaire  $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)$ .

**Propriété 26**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut calculer  $\det(A)$  :

- par développement suivant la  $j$ -ème colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

- par développement suivant la  $i$ -ème ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

**Exercice 5** Calculer le déterminant des matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ .

 **Mise en garde.**

Ne surtout pas oublier les  $(-1)^{i+j}$  dans les cofacteurs. Un bon moyen de ne pas se tromper est de se rappeler que le coefficient en haut à gauche (le coefficient  $(1, 1)$ ) correspond à un  $+1$ , et que deux coefficients adjacents sont de signes opposés :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

**Complexité de l'algorithme de calcul du déterminant.**

Ces formules ramènent le calcul d'un déterminant d'ordre  $n$  à celui de  $n$  déterminants d'ordre  $n - 1$ . Si  $u_n$  est le nombre d'opérations pour calculer un déterminant d'ordre  $n$ , alors :

$$u_n = nu_{n-1} + n \geq nu_{n-1}.$$

D'où  $u_n \geq \frac{n!}{2} u_2 = \frac{3}{2} n!$ . Ainsi, cet algorithme est rapidement explosif en nombre d'opérations, ce qui le rend totalement inefficace en pratique (sauf éventuellement pour  $n = 3$ ). Il est à comparer avec le calcul de déterminant par l'algorithme du pivot de Gauss, qui nécessite qu'en à lui  $O(n^3)$  opérations.

**Quelques chiffres.** Comparons les vitesses de calculs du déterminant d'une modeste matrice  $25 \times 25$  à l'aide d'un ordinateur téraflops, c'est-à-dire capable d'effectuer  $10^{12}$  opérations en virgule flottante par seconde :

- par développement récursif par rapport aux lignes ou aux colonnes, cela représente  $25! \approx 1,5 \times 10^{25}$  opérations, et il faudrait au moins 500 000 ans de fonctionnement ininterrompu pour effectuer ce calcul ;
- par l'algorithme du pivot de Gauss, l'ordre est de  $10^5$  opérations, que le même ordinateur effectuera en 0,1 millièmes de secondes.

 **Méthode. Calcul pratique du déterminant d'une matrice.**

*En pratique, pour calculer le déterminant d'une matrice, on pourra combiner opérations élémentaires, afin de faire apparaître des zéros dans la matrice, et développement par rapport à une ligne ou une colonne. En effet, le développement par rapport à une ligne ou une colonne devient pertinent si la matrice contient beaucoup de zéros.*

## 5.4 Exemples de calculs de déterminants

### Déterminant de Vandermonde

#### Propriété 27 (Déterminant de Vandermonde)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, \dots, a_n$  des scalaires. Alors :

$$V_n(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

**Preuve.** On propose deux méthodes de calcul :

- par opérations élémentaires et développement par rapport à une ligne ou une colonne ;
- en considérant le polynôme  $V_n(a_0, \dots, a_{n-1}, X)$ .

□

**Remarque.** On retrouve ici un résultat déjà obtenu : lorsque  $a_0, \dots, a_n$  sont deux à deux distincts, le déterminant de Vandermonde est celui de la matrice de passage de la base de Lagrange  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  à la base canonique  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ . Cette matrice étant inversible (en tant que matrice de passage entre deux bases), ce déterminant est bien non nul.

### Déterminant d'une matrice tridiagonale

**Exercice 6** Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ . Calculer le déterminant d'ordre  $n$  suivant :

$$D_n(a, b) = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a+b & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}.$$

 **À retenir. Le déterminant est une fonction polynomiale en ses coefficients.**

La formule :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

bien qu'inexploitable en général pour le calcul des déterminants, est utile sur le plan qualitatif car elle montre qu'un déterminant s'obtient par somme et produit de ses coefficients. Un déterminant est donc continu, ou de classe  $\mathcal{C}^k$ , etc, lorsque ses coefficients le sont.

## 6 Applications

### 6.1 Comatrice

**Définition.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle *comatrice de A*, et on note  $\text{Com}(A)$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont les coefficients sont les cofacteurs de  $A$ , c'est-à-dire définie par  $[\text{Com}(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)$ .

**Exemple.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -8 & -6 \\ 15 & 4 & 3 \\ -25 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

#### Théorème 28

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$A \times \text{Com}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top \times A = \det(A)I_n.$$

#### Corollaire 29

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^\top.$$

**Remarque.** Aussi jolie soit cette formule, elle a surtout un intérêt théorique, puisque la complexité des calculs explose rapidement.

**Exemples.** Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible, alors  $\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$  et donc on retrouve une vieille connaissance :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si  $n = 3$ , le calcul de la comatrice nécessite le calcul de 9 déterminants  $2 \times 2$  et du déterminant de  $A$ . Il est alors plus avantageux (en calculs et pour minimiser les erreurs de calcul) d'inverser  $A$  par méthode du pivot de Gauss.

## 6.2 Rang d'une matrice

### Définition.

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et un entier  $r$  tel que  $1 \leq r \leq \min(n, p)$ .

On appelle *déterminant d'ordre  $r$  extrait de  $A$*  tout déterminant obtenu par suppression de  $n - r$  lignes et  $p - r$  colonnes dans la matrice  $A$ .

**Exemple.** Les mineurs d'une matrice carrée d'ordre  $n$  constituent des déterminants d'ordre  $n - 1$  extraits de cette matrice.

### Propriété 30 (Expression du rang à l'aide des déterminants extraits)

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et un entier  $r$  tel que  $1 \leq r \leq \min(n, p)$ . Alors :

- $\text{rg}(A) \geq r$  si, et seulement si, il existe un déterminant non nul d'ordre  $r$  extrait de la matrice  $A$  ;
- $\text{rg}(A) = r$  si, et seulement si :
  - il existe un déterminant non nul d'ordre  $r$  extrait de  $A$  ;
  - tout déterminant d'ordre  $\geq r + 1$  extrait de  $A$  est nul.