Chapitre 4

Calcul algébrique et trigonométrique

Compétences attendues.

- ✓ Apprendre à manipuler les quantités exprimées avec $\sum$ et $\prod$ (règles de calcul, changement d'indice, groupements de termes).
- ✓ Connaitre les aspects calculatoires des coefficients binomiaux.
- ✓ Calculer une somme finie à l'aide des sommes finies de référence.
- ✓ Calculer une somme double finie indexée par un rectangle ou un triangle.
- ✓ Connaitre les valeurs remarquables de cosinus, sinus et tangente.
- ✓ Connaitre et savoir utiliser les formules trigonométriques.
- ✓ Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Sommes et produits

1.1 Notations

Définition.

Soient I un ensemble **fini** non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note :

- $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$;
- $\prod_{i\in I} a_i$ le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Par convention, lorsque $I=\emptyset$, $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

Remarque. Ces définitions ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on effectue la somme ou le produit des a_i, du fait de la commutativité et de l'associativité de la somme et du produit dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Notation.

La plupart du temps, I sera un sous ensemble d'entiers. Dans le cas où $I = [\![m,n]\!] = \{m, m+1,\dots,n-1,n\}$ avec $m \leq n$, on utilisera les notations plus commodes :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n \quad (m-n+1 \text{ termes}).$$

Danger.

Toutes les sommes et tous les produits considérés dans ce chapitre sont **finis** (l'ensemble I d'indices est fini). Le cas de familles **infinies** relève de techniques plus fines, car comme on est amené à faire une infinité d'opérations, il faut s'assurer que le procédé « converge ». Ce cas sera discuté en fin d'année.

Remarque. L'indice i est une « variable muette » : on peut le remplacer par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs. Ainsi :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m}^{n} a_j = \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

En revanche, la variable en question n'a un sens que localement, à l'intérieur de la somme et du produit : par exemple, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ a un sens, $\cancel{k \sum_{k=1}^{n} k^2}$ n'en a pas. Cette variable n'a plus aucune signification en dehors de la somme ou du produit, et est de nouveau disponible pour une autre utilisation. Par exemple, $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k^3$ a bien un sens, et aurait tout aussi bien pu s'écrire $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{j=1}^{10} j^2 + \sum_{i=1}^{10} i^3$.

Le saviez-vous ?
Le signe $\sum$ a été introduit par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1755, le symbole $\prod$ date de Gauss, mais on en trouve trace chez Descartes. Mais leur usage ne s'est pas répandu immédiatement, et de nombreux mathématiciens ont continué à utiliser des points de suspension (par exemple Abel au début du $19^{\text{ème}}$ siècle).

1.2 Propriétés de la somme et du produit

Propriété 1 (Linéarité de la somme)

Soient I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels ou complexes.

- $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i$.
- Pour tout nombre λ réel ou complexe, $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda\cdot a_i)=\lambda\cdot\left(\sum_{i\in I}a_i\right)$.

Preuve. La première propriété est une conséquence de l'associativité et de la commutativité de l'addition. La seconde propriété signifie simplement que, par distributivité de la multiplication sur l'addition, on peut mettre en facteur un terme qui ne dépend pas de l'indice de sommation. □

Propriété 2 (Règles de calculs pour les produits)

Soient I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels ou complexes.

- $\displaystyle\prod_{i\in I}(a_ib_i)=\left(\prod_{i\in I}a_i\right)\times\left(\prod_{i\in I}b_i\right)$.
- Pour tout nombre λ réel ou complexe, $\displaystyle\prod_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda^p\prod_{i\in I}a_i$, où p est le nombre d'éléments de I.

Preuve. Conséquences directes de l'associativité et de la commutativité du produit. □

Propriété 3 (Cas d'une famille constante)

Soient I un ensemble fini et α un nombre réel ou complexe (qui ne dépend pas de l'indice de sommation). Alors :

$$\sum_{i\in I}\alpha=\alpha\times\operatorname{Card}(I)\quad\text{et}\quad\prod_{i\in I}\alpha=\alpha^{\operatorname{Card}(I)}.$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}\alpha=\alpha\times(q-p+1)$.

1.3 Réorganisation de la sommation

Changement d'indice

Une somme ou un produit peuvent toujours être écrit de différentes manières selon le choix qu'on fait de la lettre-indice. Le passage d'une écriture à une autre est appelé *changement d'indice*. Dans le cadre des sommes et produits, les changements d'indices pertinents sont essentiellement de l'une des deux formes suivantes.

Propriété 4 (Glissement et renversement d'indice)

Soient n, p et ℓ trois entiers tels que $n \leq p$. Soit $(a_i)_{i\in[\![n,p]\!]}$ une famille de réels ou de complexes.

- *Glissement d'indice $j = i + \ell$:* $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} a_i = \sum_{j=n+\ell}^{p+\ell} a_{j-\ell}$.
- *Renversement d'indice $j = \ell - i$:* $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} a_i = \sum_{j=\ell-p}^{\ell-n} a_{\ell-j}$.

Méthode. Comment effectuer un changement d'indice.

Il est inutile d'apprendre ces formules par cœur, et nous les retrouverons au cas par cas. Pour effectuer en pratique un changement d'indice :

- *on définit le nouvel indice en fonction de l'indice de départ ;*
- *on exprime la somme avec ce nouvel indice en veillant à changer les bornes de la somme et le terme sous la somme en fonction du nouvel indice.*

On vérifiera alors bien que l'on a ni supprimé, ni ajouté aucun terme à la somme initiale.

Exercice 1 À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, déterminer la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

Donnons-en une application importante aux *sommes télescopiques* de la forme $\displaystyle\sum_{k=\ldots}^{\ldots} (a_{k+1} - a_k)$.

Propriété 5 (Sommes et produits télescopiques - ✎)

Soit $(a_i)_{i\in[\![m,n+1]\!]}$ une famille de réels ou de complexes. Alors :

$$\sum_{i=m}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m.$$

Si de plus les a_i sont tous non nuls :

$$\prod_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Exercice 2 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Sommation ou produit par groupements de termes

Le résultat suivant est une conséquence directe de l'associativité et de la commutativité de la somme et du produit.

Propriété 6 (Sommation et produit par paquets)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres réels ou complexes. Si $\{I_j,\ j = 1,\dots,p\}$ est un recouvrement disjoint de I, alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \cdots + \sum_{i\in I_p} a_i = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i\in I_j} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I} a_i = \left(\prod_{i\in I_1} a_i\right) \times \cdots \times \left(\prod_{i\in I_p} a_i\right) = \prod_{j=1}^{p} \left(\prod_{i\in I_j} a_i\right).$$

Corollaire 7 (Relation de Chasles)

Soient p, q et r trois entiers tels que $p \leq r \leq q$. Soit $(a_i)_{i\in [\![p,q]\!]}$ une famille de réels ou de complexes. Alors :

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{i=p}^{r} a_i + \sum_{i=r+1}^{q} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^{q} a_i = \left(\prod_{i=p}^{r} a_i\right) \times \left(\prod_{i=r+1}^{q} a_i\right).$$

Méthode. Comment calculer une somme à l'aide de regroupements de termes.
On décompose la somme de départ en plusieurs sommes plus simples à calculer. On peut par exemple séparer les termes d'indice pair et les termes d'indice impair lorsque l'occasion se présente.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n)$, où $\min(k,n)$ est le minimum des entiers k et n.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.

1.4 Quelques formules remarquables

Les formules qui suivent sont à connaître par cœur et sont la base de nombreux calculs de sommes.

Propriété 8 (Somme d'une progression arithmétique de nombres réels ou complexes - ✎)

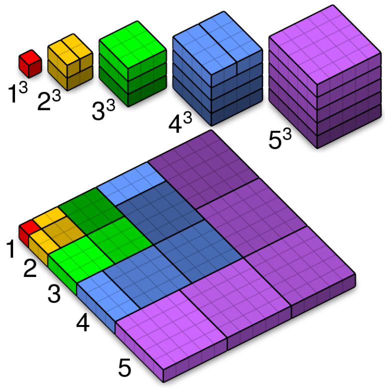
Si (u_k) est une suite arithmétique, alors :
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \underbrace{\frac{u_m + u_n}{2}}_{\substack{\text{moyenne du } 1^{er} \\ \text{et du dernier terme}}} \times \underbrace{(n-m+1)}_{\text{nombre de termes}}.$$

Propriété 9 ( )

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Remarque. Ce procédé peut être poursuivi pour calculer successivement les sommes de puissances (cela nécessite alors d'utiliser la formule du binôme de Newton que nous verrons par la suite). On obtient pour la somme des premiers cubes :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$



Cette égalité peut aussi se retrouver en observant sur l'illustration ci-contre l'égalité des volumes entre le pavé du bas et les cubes disposés au dessus :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

D'où l'égalité souhaitée, puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété 10 (Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique -)

Soit $q \in \mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Alors : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}.$

Astuce.

Pour $q \neq 1$, cette formule se retient bien plus simplement sous la forme :

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = (\text{premier terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

Propriété 11 (Troisième identité remarquable généralisée -)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux nombres réels ou complexes. Alors :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Remarques.

- Pour $n = 2$, on retrouve le classique $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
- Si n est impair,
$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + (-1)^{n-2}ab^{n-2} + (-1)^{n-1}b^{n-1}\right).$$

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme

2.1 Coefficients binomiaux

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *factorielle* n et on note $n!$ l'entier défini par $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Remarque. On a $0! = 1$ et si $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$.

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. On appelle *coefficient binomial « p parmi n »* le nombre noté $\binom{n}{p}$ défini par :
$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{si } p > n \text{ ou } p < 0 \end{cases}.$$

Remarque. Comme on le verra dans un chapitre ultérieur, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n. Cette interprétation combinatoire nous permettra de revisiter la plupart des résultats évoqués ici de manière plus élégante.

Propriété 12 (Relations sur les coefficients binomiaux -)

Soit n un entier naturel non nul et $p \in \mathbb{Z}$.

(1) *Symétrie des coefficients binomiaux :* $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(2) *Formule du capitaine :* $\displaystyle p \cdot \binom{n}{p} = n \cdot \binom{n-1}{p-1}$.

(3) *Formule du triangle de Pascal :* $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

Remarque. Cette dernière relation nous permet de construire le *triangle de Pascal*, qui nous donne une construction rapide des premiers coefficients binomiaux.

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$\dots$		
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
n	1	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\dots$	$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$	$\dots$	1	
$n+1$	1	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$			$\binom{n+1}{p+1}$		$\dots$	1

Formule de Pascal :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

A priori, les coefficient binomiaux sont des rationnels, car quotients de deux entiers. On peut dire bien mieux grâce à la formule du triangle de Pascal.

Propriété 13 (✎)

Quels que soient les entiers p et n, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Le saviez-vous ?

Le triangle des coefficients binomiaux, que nous appelons communément « triangle de Pascal » était en fait connu depuis bien longtemps déjà lorsque Blaise Pascal s'y intéressa : on y trouve mention déjà chez Halayudha, mathématicien indien du $10^{\text{ème}}$ siècle, ainsi qu'en Chine au $13^{\text{ème}}$ siècle. La contribution de Pascal a essentiellement été de démontrer en 1654 un grand nombre de propriétés de ce triangle, jusque-là admises. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il a mis au point le principe de la démonstration par récurrence.

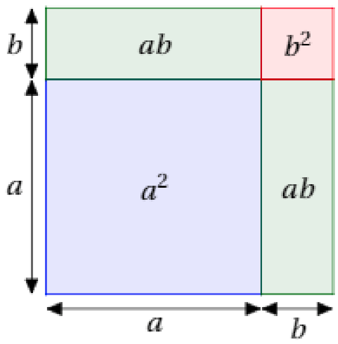
2.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 14 (Formule du binôme de Newton - ✎)

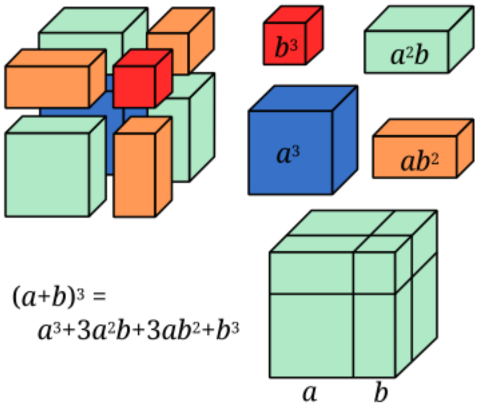
Soient a et b deux nombres réels ou complexes et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Représentations graphiques. La formule du binôme de Newton s'interprète géométriquement pour $n=2$ et $n=3$.



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Exemples.

- $(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$.
- Pour $a = b = 1$, on obtient $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Ainsi, la somme des coefficients de la n-ème ligne du triangle de Pascal vaut 2^n.
- Pour $a = 1$ et $b = -1$, on obtient $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Exercice 5 Développer :

$(a+b)^4 =$

$(a-b)^5 =$

3 Sommes doubles

3.1 Sommes doubles indexées par un rectangle

On suppose dans cette section que l'ensemble d'indices est $I = [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ où $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une famille de réels ou complexes indexée par I sera alors plutôt notée $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, et sa somme sera notée $S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}$. Pour calculer une telle somme, nous cherchons bien souvent à faire apparaître des sommes simples. On dispose pour cela du résultat suivant.

Propriété 15 (Somme double indexée par un rectangle)

Les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Preuve. On représente ces $n \times p$ nombres sous forme d'un tableau, et la somme que nous cherchons à calculer est celle de tous les coefficients du tableau.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=p$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,p}$	
$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,p}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$i=n$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,p}$	
					S

□

Propriété 16 (Produit de deux sommes)

Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq p}$ deux familles de nombres réels. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i \times b_j = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_i \times b_j.$$

Preuve. Par distributivité du produit sur la somme :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[a_i \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_i b_j\right).$$

On est ramené à une somme double comme dans la proposition précédente. □

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} i \times j$.

3.2 Sommes doubles indexées par un triangle

On suppose à présent que $n = p$, et on souhaite faire la somme de tous les coefficients se trouvant au dessus de la diagonale (comprise ou non).

Propriété 17 (Somme double indexée par un triangle)

On dispose des égalités suivantes :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$

Preuve. De même, disposons les $a_{i,j}$ dans un tableau à double entrée. Mais cette fois le tableau est triangulaire : seuls sont pris en compte les éléments $a_{i,j}$ où $i \leq j$.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$
$i=2$		$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{2,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$i=n$				$a_{n,n}$	$\displaystyle\sum_{j=n}^{n} a_{n,j}$
	$\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_{i,1}$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i,2}$	$\cdots$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$	S

On obtient :

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}.$$

La deuxième égalité s'obtient en sommant les termes qui sont strictement au dessus de la diagonale.

$\square$

Méthode. Calcul d'une somme double indexée par un triangle.

Ces égalités ne sont pas à apprendre par cœur. On les retrouve aisément en procédant ainsi :

(i) *on choisit la variable sur laquelle on somme en premier, par exemple j. On écrit alors les sommes sans les bornes :* $\displaystyle\sum_{i=}\left(\sum_{j=} a_{i,j}\right)$ *;*

(ii) *on détermine les bornes de la somme* $\displaystyle\sum_{i=}$ *en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par i. Ces bornes ne doivent pas dépendre de j ;*

(iii) *on détermine enfin les bornes de la deuxième somme* $\displaystyle\sum_{j=}$ *en fixant i et en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par j. Cet intervalle dépend de i.*

Exercice 7 Calculer $S = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

Remarque. Toutes les règles sur l'interversion de deux sommes s'étendent sans difficultés aux interversions de produits, en remplaçant le symbole $\sum$ par le symbole $\prod$.

Corollaire 18 (✎)

Soient $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels ou complexes.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j.$$

Remarque. Pour $n=2$, on retrouve la formule bien connue $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. Si $n=3$, on obtient :

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

4 Trigonométrie

4.1 Notion de congruence

Définition.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que deux réels x et y sont *congrus modulo* α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + k\alpha$. On note alors $y \equiv x \pmod{\alpha}$ ou $y \equiv x\,[\alpha]$.

L'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid y \equiv x\,[\alpha]\} = \{x + k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est généralement noté $x + \alpha\mathbb{Z}$.

Exemples.

- Être pair, c'est être congru à 0 modulo 2. Être impair, c'est être congru à 1 modulo 2. L'ensemble des entiers pairs est donc $2\mathbb{Z}$ tandis que l'ensemble des entiers impairs est $1 + 2\mathbb{Z}$.
- Un angle orienté est défini modulo 2π, c'est-à-dire que deux angles sont égaux si, et seulement si, leurs mesures sont égales modulo 2π. Par exemple, $7\pi \equiv \pi\,[2\pi]$ et $\dfrac{11\pi}{2} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Propriété 19 (✎)

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

- Si $a \equiv b\,[\alpha]$ et $c \equiv d\,[\alpha]$, alors $a + c \equiv b + d\,[\alpha]$.
- Si $a \equiv b\,[\alpha]$, alors $\lambda a \equiv \lambda b\,[\lambda\alpha]$.

4.2 Sinus, cosinus, tangente

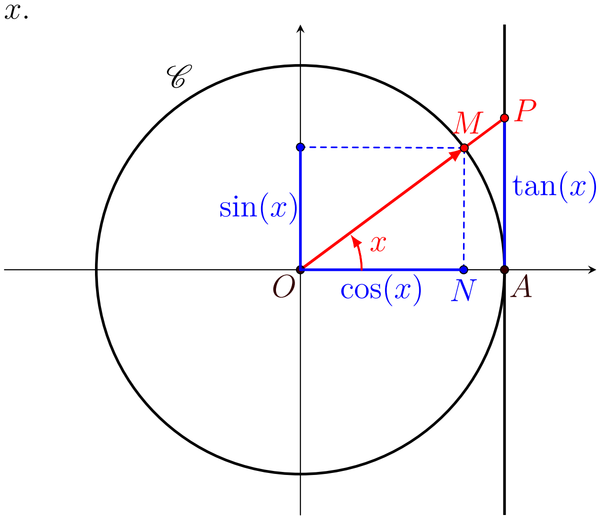
Dans toute la suite, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormée direct du plan.

Définition.

On appelle *cercle trigonométrique* le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Autrement dit, $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Définition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère le point M de $\mathscr{C}$ tel que l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x.



- On appelle *cosinus du réel* x, et on note $\cos(x)$, l'abscisse du point M.
- On appelle *sinus de* x, et on note $\sin(x)$, l'ordonnée du point M.
- Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on appelle *tangente de* x, et on note $\tan(x)$, l'ordonnée de P, point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

Pour aller plus loin.

On se contentera de cette définition pour cette année bien qu'elle ne soit pas vraiment satisfaisante : avez-vous un jour défini convenablement un angle orienté de vecteurs ? sa mesure ? le nombre π, si ce n'est que c'est le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1… mais qu'est-ce qu'un périmètre ?

Pour bien définir tous ces objets, il faudrait commencer « par la fin » en définissant convenablement les fonctions sinus et cosinus, via les formules suivantes (qui ne sont ni à comprendre, ni à connaitre pour le moment) :

$$\cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

On pourrait alors définir π comme étant le plus petit réel positif dont le cosinus vaut -1, puis s'attaquer à la mesure d'un angle orienté… mais ce n'est pas le sujet ici, et il nous manque des connaissances pour entreprendre une telle construction.

Remarque. Ces définitions correspondent bien (au moins dans le cas où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) à la trigonométrie du collège : le triangle ONM est rectangle en N, et son hypoténuse est de longueur 1 (puisque M est sur le cercle trigonométrique). Par conséquent :

$$\cos(x) = \cos(\widehat{NOM}) = \frac{ON}{OM} = ON \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(\widehat{NOM}) = \frac{NM}{OM} = NM.$$

D'autre part, dans le cas où $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, intéressons nous au triangle OAP. Les droites (MN) et (AP) étant parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès qui assure l'égalité des rapports de distances algébriques (c'est-à-dire avec un éventuel signe) suivantes :

$$\frac{MN}{AP} = \frac{ON}{OA}, \text{ ce qui se récrit } \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{1}.$$

Ainsi (puisque $\cos(x) \neq 0$ car $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$) :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.}$$

Le saviez-vous ?

Littéralement, « trigonométrie » signifie « mesure des trois angles », donc se rapporte aux propriétés des angles d'un triangle. Elle existe depuis l'antiquité (Égypte, Babylone, Grèce), et est développée en rapport avec l'astronomie.

Le sinus, sous sa forme actuelle, a été introduit par les indiens aux alentours de 500 après J.-C., pour l'étude des angles célestes. La première table connue date de 499, et est attribuée au mathématicien indien Aryabhata. Le nom de « sinus » provient d'un mot sanscrit signifiant « arc », apparaissant dans l'ouvrage de Aryabhata, et transcrit phonétiquement en arabe, puis déformé en un mot proche signifiant « repli de vêtement ». Il a été traduit en latin au 12$^{\text{ème}}$ siècle par le mot « sinus » signifiant « pli ».

Propriété 20 (Paramétrisation du cercle trigonométrique)

Si $(x,y) \in \mathscr{C}$, alors il existe un unique $t \in]-\pi,\pi]$ tel que $(x,y) = (\cos(t), \sin(t))$.

Preuve. Il est évident qu'un tel t existe : c'est la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point de coordonnées (x,y). Nous admettons l'unicité, puisqu'elle nécessite de disposer d'une définition rigoureuse de π, ce que nous n'avons pas encore. $\square$

Remarque. On a choisi de prendre $t \in]-\pi,\pi]$, mais on aurait également pu prendre $t \in [0, 2\pi[$, ou encore dans n'importe quel intervalle de longueur 2π ouvert d'un côté et fermé de l'autre.

Corollaire 21 (✎)

Soit $r > 0$ et soit $\mathscr{C}_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r\}$.
Pour tout $(x,y) \in \mathscr{C}_r$, il existe un unique $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Remarque. Ceci est à la base des coordonnées dites polaires qu'on utilise notamment en physique : tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ différent de O est sur un unique cercle de centre O (celui de rayon $\sqrt{x^2+y^2}$). Et donc il existe un unique couple $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi]$ tel que :

$$(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

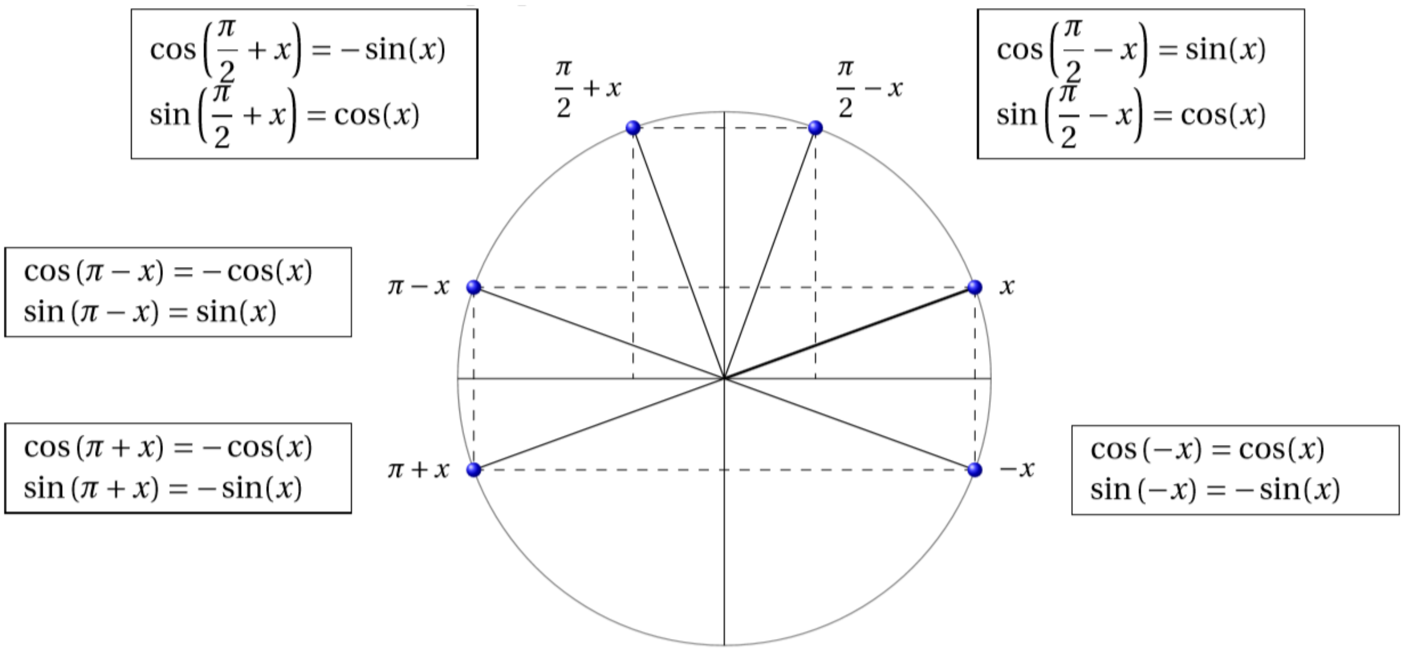
Autrement dit, au lieu de repérer un point par son abscisse et son ordonnée comme on en a l'habitude, on peut se donner un rayon (la distance du point à l'origine) et un angle. C'est d'ailleurs le principe de la représentation exponentielle des nombres complexes que nous (re)verrons dans un prochain chapitre.

Propriété 22 (✎)

Soit x un réel. Alors :

- $\cos(x) \in [-1,1]$ et $\sin(x) \in [-1,1]$.
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
- Si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $\tan(x+\pi) = \tan(x)$.
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.
- Si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$.

Nous obtenons les relations suivantes par une lecture efficace du cercle trigonométrique.



Astuce.

Il est inutile d'apprendre par cœur ces formules : elles se retrouvent facilement avec un cercle trigonométrique. Donnons quelques conseils de bon sens pour cela :

- dessinez un cercle trigonométrique suffisamment grand pour y voir quelque chose. Cela peut être fait directement dans une copie, personne ne vous le reprochera (bien au contraire) ;
- ne prenez pas un angle proche de $\frac{\pi}{4}$, vous ne sauriez alors plus distinguer $\sin(x)$ de $\cos(x)$. Prendre x proche de 0 (par exemple environ $\frac{\pi}{6}$) est plus sage.

Remarques. À partir des formules $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$, on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

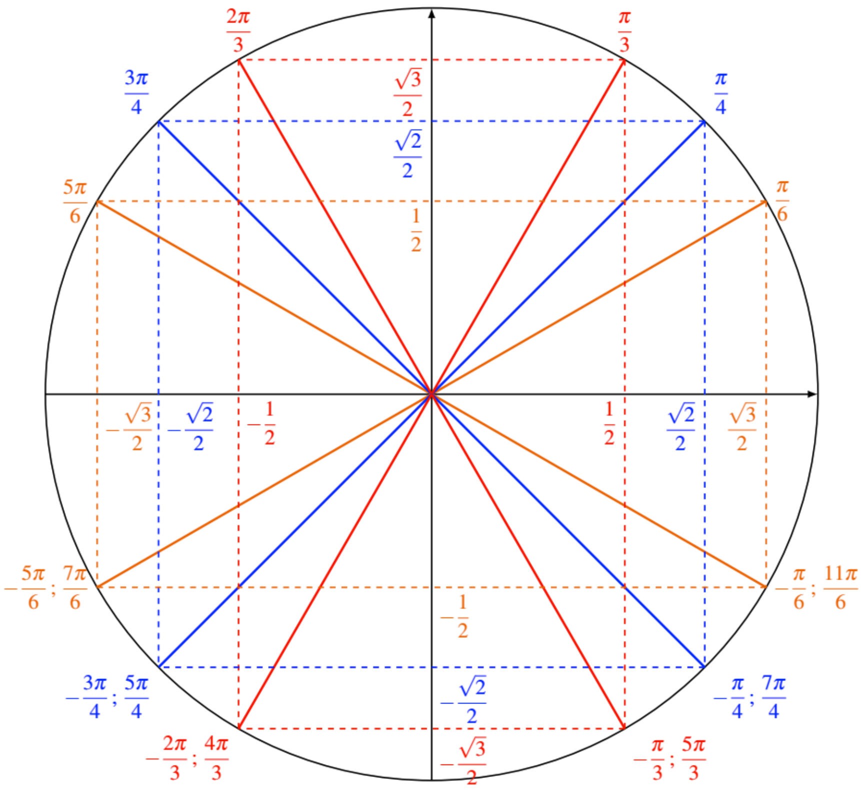
$$\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x).$$

En particulier, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(k\pi) = 0$.

4.3 Valeurs remarquables

Les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques sont à connaitre par cœur.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0



4.4 Formules usuelles

Propriété 23 (Formules d'addition - ✎)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

Propriété 24 (Formules d'addition pour la tangente - ✎)

Soient a, b deux réels. Sous réserve que toutes les tangentes suivantes existent, on a :

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

Propriété 25 (Formules de duplication - ✎)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1 = 1 - 2\sin(x)^2.$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Corollaire 26

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Remarque. Ces dernières formules seront particulièrement utiles lorsqu'il s'agira de trouver une primitive de $x \mapsto \cos(x)^2$ ou $x \mapsto \sin(x)^2$.

Exercice 8 Résoudre l'inéquation $\cos(x)^4 - \sin(x)^4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Les formules de la proposition suivantes sont hors programme, mais le programme officiel mentionne qu'il faut savoir les retrouver, et donc reproduire la preuve ci-dessous.

Propriété 27 (Formules de l'arc moitié -)

Soit $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Notons $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Alors :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

et si $x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, alors $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Propriété 28 (Formules de linéarisation -)

Si a et b sont deux réels, alors :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$.
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$.
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$.

4.5 Équations et inéquations trigonométriques

Propriété 29

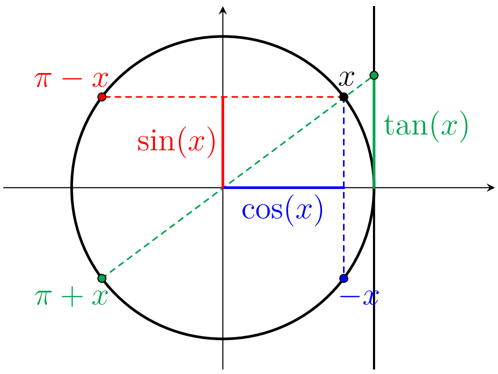
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \cos(y) \;\Leftrightarrow\; (x \equiv y\ [2\pi] \textbf{ ou } x \equiv -y[2\pi])\,,$$

$$\sin(x) = \sin(y) \;\Leftrightarrow\; (x \equiv y\ [2\pi] \textbf{ ou } x \equiv \pi - y[2\pi])\,.$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\tan(x) = \tan(y) \;\Leftrightarrow\; x \equiv y\ [\pi].$$



Exercice 9 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\sin(x) = \cos(x)$.

Exercice 10 Résoudre l'inéquation $\cos(x) > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Propriété 30 (Transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$ - ✎)

Soient a et b deux réels. Alors il existe un réel φ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \varphi).$$

Interprétation physique. La somme de deux signaux périodiques de même période est encore un signal périodique de même période. Son amplitude est $\sqrt{a^2 + b^2}$ et son déphasage vaut φ.

Exercice 11 Résoudre l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = -1$.