Chapitre 5

Rappels et compléments sur les fonctions

Compétences attendues.

- ✓ Reconnaître et interpréter les symétries d'une courbe représentative de fonction.
- ✓ Étudier les variations d'une fonction et en tracer la courbe représentative (domaine de définition, calcul de la dérivée, tableau de variations, limites aux bornes du domaine, asymptotes éventuelles).
- ✓ Montrer qu'une fonction est majorée, minorée, bornée, et déterminer ses extremums éventuels.
- ✓ Appliquer le théorème de la bijection pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Vocabulaire usuel

1.1 Domaine de définition

Définition.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Une *fonction f de X dans* $\mathbb{R}$ est un objet mathématique associant à tout élément $x \in X$:

- un et un seul élément $y = f(x) \in \mathbb{R}$ lorsque l'expression $f(x)$ a bien un sens ;
- aucun élément dans le cas contraire.

On appelle *domaine de définition de f*, et on note $\mathscr{D}_f$, l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles l'expression $f(x)$ a bien un sens.

On dit que f *est définie sur une partie $\mathscr{D}$ de* $\mathbb{R}$ si $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_f$.

Rédaction.

Lors de l'étude d'une fonction f, on commencera par bien préciser le domaine de définition de f (si cela n'est pas déjà fait dans l'énoncé).

Exercice 1 Déterminer le domaine de définition des fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\cos(2x)}$.

Notation.

Si f est définie sur $\mathscr{D}$, on note alors : $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Deux remarques sur cette notation :

- on observera bien la différence subtile entre les deux flèches : la première, sans barre verticale, signifie que f est définie sur $\mathscr{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La seconde flèche, avec une barre verticale, signifie que f associe le réel $f(x)$ au réel x.

  S'il n'y a pas d'ambigüité sur le domaine de définition, on note parfois simplement $f : x \mapsto f(x)$.
- la variable x est une variable muette, et on peut changer son nom à loisir : les notations $x \mapsto x^2$, $t \mapsto t^2$ et $u \mapsto u^2$ désignent la même fonction.

Mise en garde.

On veillera à ne pas confondre la **fonction** f et le **nombre** $f(x)$. Par exemple si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, alors on peut dire « f est dérivable », mais pas « $f(x)$ est dérivable », la notion de dérivabilité n'ayant de sens que pour les fonctions.

Dans le même esprit, on n'écrira pas « la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}$ », mais « la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ », l'affirmation « la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante » étant indépendante de la variable x (elle peut en effet aussi bien s'écrire « la fonction $t \mapsto t^3$ est croissante »).

Définition.

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$, et soient A et B des parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset \mathscr{D} \subset B$.

- On appelle *restriction de f à A*, notée $f_{|A}$, la fonction définie sur A **seulement** par la relation $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.
- On appelle *prolongement de f à B* toute fonction g définie sur B pour laquelle $g_{|\mathscr{D}} = f$, c'est-à-dire pour laquelle $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.

Mise en garde.

Toute fonction (qui n'est pas définie sur $\mathbb{R}$) possède beaucoup de prolongements : par exemple, si f est la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = x$, alors $g : x \mapsto \max(x, 0)$ et $h : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ sont des prolongements de f à $\mathbb{R}$. On parle donc toujours d'**un** prolongement, et non **du** prolongement.

1.2 Graphe d'une fonction, image, antécédent

Définition.

Si f est une fonction définie sur $\mathscr{D}$, le *graphe de f* ou *courbe représentative de f* est l'ensemble noté $\mathscr{C}_f$ des points du plan de coordonnées (x, y) où $x \in \mathscr{D}$ et $y = f(x)$.

Définition.

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$.

- Si x appartient à $\mathscr{D}$, on dit que $f(x)$ est **l'***image de x par f* ;
- Si $x \in \mathscr{D}$ et $y \in \mathbb{R}$ sont tels que $y = f(x)$, on dit que x est **un** *antécédent de y par f*.

Exemple. Si f est la fonction cosinus, alors $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, de sorte que $\frac{1}{2}$ est l'image de $\frac{\pi}{3}$ par f. Et donc $\frac{\pi}{3}$ est un antécédent de $\frac{1}{2}$ par la fonction f. Mais puisque $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$ est aussi un antécédent de $\frac{1}{2}$ par f.

Mise en garde.

Un élément x de $\mathscr{D}$ possède toujours une et une seule image par f. En revanche, un réel y peut posséder plusieurs antécédents par f, ou aucun. Raison pour laquelle on parle d'un antécédent, et non de « l' » antécédent de y par f.

Définition.

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$.

Pour toute partie A de $\mathscr{D}$, on appelle *image de A par f*, et on note $f(A)$, l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\} = \{f(a),\ a \in A\}.$$

L'image $f(\mathscr{D})$ de $\mathscr{D}$ par f est appelée *l'image de f*, et notée $\mathrm{Im}(f)$.

On dit que f *est à valeur dans un ensemble B* si $\mathrm{Im}(f) \subset B$, autrement dit si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \in B$. On peut alors noter $f : \mathscr{D} \to B$ au lieu de $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$.

Exemples.

- L'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est l'intervalle $[1, +\infty[$. L'image de $\mathbb{R}_-$ par l'exponentielle est $]0, 1]$. L'exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (ou dans $\mathbb{R}_+^*$), et son image est $\mathbb{R}_+^*$
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction sinus est $\{0\}$, l'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$. L'image de la fonction sinus est $[-1, 1]$.

1.3 Opérations sur les fonctions

Définition.

On dit que deux fonctions f et g sont égales, et on note $f = g$, si :

- elles sont définies sur le même ensemble $\mathscr{D}$;
- elles prennent la même valeur en tout point de $\mathscr{D}$: $\quad \forall x \in \mathscr{D}, \quad f(x) = g(x).$

Exemple. Les fonctions $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\sqrt{x})^2 \end{array}$ coïncident bien sur $\mathbb{R}_+$, mais ne sont pas égales car n'ont pas le même ensemble de définition. On a tout de même $f_{|\mathbb{R}_+} = g$.
En revanche, si $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2} \end{array}$, alors $f = h$.

Définition.

Soient f et g deux fonctions définies sur le **même** ensemble $\mathscr{D}$.

- La *somme de f et g* est la fonction notée $(f + g)$ définie pour tout $x \in \mathscr{D}$ par :
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
- Le *produit de f et g* est la fonction notée $f \times g$ définie pour tout $x \in \mathscr{D}$ par :
$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$
- Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$, on définit le *quotient de f par g*, et on note $\dfrac{f}{g}$, la fonction définie pour tout $x \in \mathscr{D}$ par : $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}.$

Définition.

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans A, et soit g une fonction définie sur A.
On appelle *composée de f suivie de g* la fonction $g \circ f$ définie pour tout $x \in \mathscr{D}$ par : $\quad g \circ f(x) = g(f(x)).$

Danger.

La composition n'est pas commutative : en général, $f \circ g \neq g \circ f$. On veillera donc bien à l'ordre dans lequel on applique les fonctions : la fonction la plus à droite est celle que l'on applique en premier à la variable.

Propriété 1 (Associativité de la composition)

Si $f : \mathscr{D} \to A$, $g : A \to B$ et $h : B \to \mathbb{R}$ sont trois fonctions, alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
On note alors simplement $h \circ g \circ f$ la composée des trois fonctions.

1.4 Fonctions monotones

Définition.

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$.

- La fonction f est *croissante sur* $\mathscr{D}$ (resp. *strictement croissante sur* $\mathscr{D}$) si pour tous $x, y \in \mathscr{D}$ tels que $x \leq y$ (resp. $x < y$), $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$).
- La fonction f est *décroissante sur* $\mathscr{D}$ (resp. *strictement décroissante sur* $\mathscr{D}$) si pour tous $x, y \in \mathscr{D}$ tels que $x \leq y$ (resp. $x < y$), $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).
- La fonction f est *monotone* (resp. *strictement monotone*) sur $\mathscr{D}$ si f est soit croissante (resp. strictement croissante), soit décroissante (resp. strictement décroissante) sur $\mathscr{D}$.

Danger.

Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, l'affirmation « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(x+1)$ » **n'est pas** équivalente à « f est croissante ». On pourra s'en convaincre en considérant la fonction $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$ qui n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$, mais satisfait pourtant la première assertion.

Remarques.

- Une fonction peut être ni croissante, ni décroissante. Par exemple, la fonction cosinus n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}$. Mais elle est décroissante sur $[0, \pi]$ et croissante sur $[\pi, 2\pi]$.
- Une fonction peut être à la fois croissante et décroissante sur $\mathscr{D}$, mais c'est le cas si, et seulement si, elle est constante.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$.
- On montre facilement que la somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante), et que si l'une d'entre elles est strictement croissante, alors la somme est strictement croissante.

  Le produit de deux fonctions monotones nécessite un peu de précautions, car on ne peut multiplier terme à terme que des inégalités dont tous les termes sont positifs. De même pour le quotient. Par conséquent, nous n'énoncerons pas de règle pour la monotonie d'un produit ou d'un quotient, et il faudra réfléchir au cas par cas.

Propriété 2 (✎)

Soient $f : \mathscr{D} \to A$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions monotones sur leurs ensembles de définition. Alors $g \circ f$ est aussi monotone, et la règle des signes donne le sens de monotonie :

- croissante si f et g ont même sens de variation ;
- décroissante si f et g ont des sens de variation opposées.

Si de plus f et g sont strictement monotones, alors $g \circ f$ est également strictement monotone.

Méthode. Sens de variation sans dériver.
Le résultat ci-dessus peut souvent épargner un calcul de dérivée si son seul but est de déterminer un sens de variation.

Exercice 2 Déterminer le sens de variation de la fonction $f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} \end{array}$.

1.5 Majorant, minorant, extremum

Définition.

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$. On dit que f est :

- *majorée* si : $\quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{D}, f(x) \leq M.$
  Un tel réel M, s'il existe, est alors appelé un *majorant de* f.
- *minorée* si : $\quad \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{D}, f(x) \geq m.$
  Un tel réel m, s'il existe, est alors appelé un *minorant de* f.
- *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples.

- La fonction $x \mapsto x^2$ est minorée (par 0) mais n'est pas majorée car elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (et donc prend des valeurs aussi grandes que l'on veut).
- Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k$ n'est jamais majorée, et elle est minorée (par 0) si, et seulement si, k est pair.
- La fonction $x \mapsto 2\cos(3x) + 1$ est bornée car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad -1 \leq 2\cos(3x) + 1 \leq 3.$

Propriété 3

Une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est bornée si, et seulement si, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}$, $|f(x)| \leq K$.

Définition.

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$, et soit $a \in \mathscr{D}$. On dit que f possède :

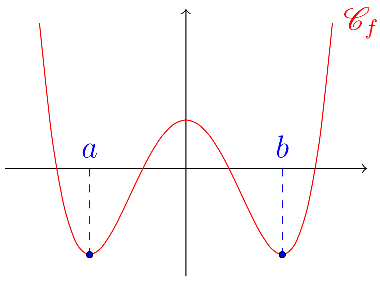
- un *maximum en* a si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \leq f(a)$.
  Le réel $f(a)$ est alors appelé **le** maximum de f, et on note alors $f(a) = \max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.
- un *minimum en* a si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \geq f(a)$.
  Le réel $f(a)$ est alors appelé **le** minimum de f, et on note alors $f(a) = \min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x)$.
- un *extremum en* a si f possède soit un maximum, soit un minimum en a.

Remarque. Si f possède un maximum en a, alors elle est majorée, et $f(a)$ est un majorant de f.

Mise en garde.

Une fonction peut très bien ne pas avoir de maximum ni de minimum, et quand elle en a un, il peut être atteint plusieurs fois.

Par exemple, la fonction f représentée ci-contre admet un minimum, atteint en deux points a et b. Elle n'a cependant pas de maximum.



Exemples.

- La fonction $f : x \mapsto e^x$ n'admet ni maximum, ni minimum sur $\mathbb{R}$. En effet, elle est non majorée car elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc elle ne peut avoir de maximum. D'autre part, bien qu'elle soit minorée par 0 (car $e^x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), elle n'admet pas de minimum : supposons en effet qu'elle admette un minimum en a, alors pour tout $x < a$, on aurait $f(x) < f(a)$ car f est strictement croissante, contredisant la définition d'un minimum.
- La fonction sin possède un maximum qui vaut 1, atteint en tous réels de la forme $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 4

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. Alors :

- f est majorée (resp. minorée, bornée) si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f)$ est une partie majorée (resp. minorée, bornée) de $\mathbb{R}$;
- f admet un maximum (resp. un minimum) si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f)$ admet un maximum (resp. un minimum).

1.6 Fonctions paires, impaires, périodiques

Définition.

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ symétrique (c'est-à-dire tel que pour tout $x \in \mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$). On dit que f est :

- *paire* si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = f(x)$;
- *impaire* si : $\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = -f(x)$.

Exemples.

- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont paires.
- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$ sont impaires, de même que $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est de même parité que n.

Remarque. Si f est impaire et si $0 \in \mathscr{D}$, alors :

$$f(0) = f(-0) = -f(0), \text{ d'où } f(0) = 0.$$

Ainsi sa courbe $\mathscr{C}_f$ contient toujours le point $(0, 0)$.

Définition.

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$.

- Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est *périodique de période T*, ou *T-périodique*, si :
  - $\forall x \in \mathscr{D},\ x + T \in \mathscr{D}$ et $x - T \in \mathscr{D}$;
  - $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x+T) = f(x)$.
- La fonction f est dite *périodique* s'il existe un réel $T > 0$ tel que f soit T-périodique.

Exemples.

- Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. Pour tout $a > 0$, la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)$ est a-périodique.
- La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, et donc :
$$f(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = f(x).$$

Exercice 3 Montrer que si $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est T-périodique, alors pour tout $x \in \mathscr{D}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $f(x+nT) = f(x)$.

Conséquence. Si $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est T-périodique, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f est aussi (kT)-périodique.

Remarque. Il n'est pas vrai qu'une fonction périodique possède une période plus petite que toutes les autres. On peut s'en convaincre en considérant par exemple une fonction constante, qui est T-périodique pour tout $T > 0$.

2 Fonctions continues, fonctions dérivables

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle I. Tous les résultats qui suivent sont admis pour l'instant (et pour la plupart ont déjà été rencontrés au lycée), mais seront démontrés proprement plus tard dans l'année.

2.1 Limites de fonctions

La définition précise de limites et de la continuité fera l'objet d'un chapitre ultérieur, nous nous contentons donc de l'intuition de limite, et des propriétés déjà connues.

Propriété 5 (Opérations sur les limites)

Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle I. Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et a un élément ou une borne de I (éventuellement $\pm\infty$).

- **Somme.**

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

- **Produit.**

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a} (f \times g)(x) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

- **Quotient.** Si $\ell' \neq 0$:

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Et dans le cas où ℓ' est nul :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exercice 4 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - x^4}$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2 - \sqrt{4 - \frac{1}{x}}}$.

Astuce.

On retiendra que pour lever une indétermination, on peut éventuellement transformer l'expression algébrique donnée en développant, en factorisant, en multipliant par la quantité conjuguée, ...

Propriété 6 (Limite d'une fonction composée)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f, g deux fonctions telles que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = c$.
Alors, sous réserve d'existence, la fonction composée $g \circ f$ vérifie :

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c.$$

Remarque. Cette dernière propriété justifie la recherche d'une limite par changement de variable : on ne s'intéresse plus à la limite de $g \circ f(x)$ quand $x \to a$, mais de $g(X)$ quand $X \to b$.

Exercice 5 Déterminer $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x) + 1}$.

2.2 Continuité

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est *continue* en un point $a \in I$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est *continue sur un intervalle* I si elle est continue en tout point de I.

Interprétation graphique. Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon.

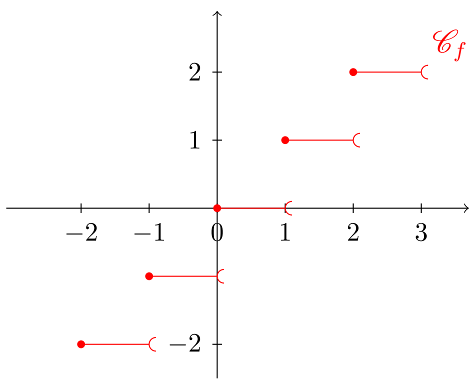
Propriété 7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $a \in I$. Alors pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple. La fonction *partie entière* $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur tout intervalle de la forme $[k, k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Elle est cependant discontinue en tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour le constater, considérons la suite (u_n) définie par $u_n = k - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Elle converge vers k, alors que :

$$f(u_n) = \left\lfloor k - \frac{1}{n} \right\rfloor = k - 1 \xrightarrow{n \to +\infty} k - 1 \neq k = f(k).$$

Par la propriété 7, f est donc discontinue en k.



Courbe représentative de la fonction partie entière.

Propriété 8 (Prolongement par continuité)

Soit f nue fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, b]$ (ou $]a, b[$, ou $]a, +\infty[$).

On dit que f est *prolongeable par continuité en a* si f admet une limite **finie** ℓ en a.
On appelle alors prolongement par continuité de f en a la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[a, b]$ (ou $[a, b[$, ou $[a, +\infty[$) par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \ell & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction ainsi prolongée est alors nécessairement continue en a.

Danger.
On ne parlera de prolongement par continuité qu'en un réel, pas en $\pm\infty$. En effet, $-\infty$ et $+\infty$ n'étant pas des réels, il n'est donc pas question d'écrire $f(+\infty)$ ou $f(-\infty)$.

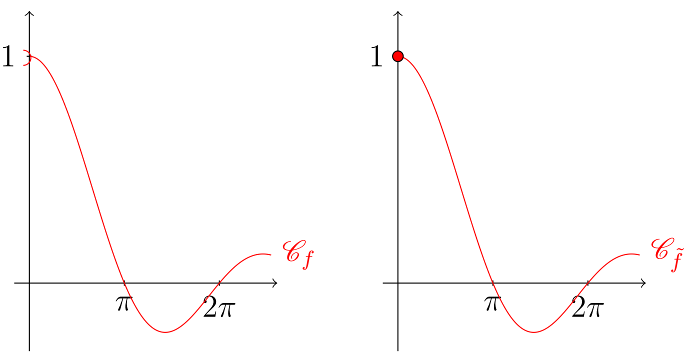
Exemple. La fonction *sinus cardinal*.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Donc f est prolongeable par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette fonction s'appelle le *sinus cardinal*.



Courbe représentative de f et de son prolongement par continuité $\tilde{f}$ en 0.

2.3 Rappels sur la dérivée

Définition.

Soit $a \in I$. On appelle *taux d'accroissement de f en a* la fonction $\tau_a(f) : \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$.

On dit que f est *dérivable en a* si $\tau_a(f)$ admet une limite finie quand x tend vers a. Dans ce cas, la limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et est noté $f'(a)$. Ainsi, sous réserve d'existence :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si f est dérivable en a, quelque soit $a \in I$, on dit que *f est dérivable sur I*, et on appelle *fonction dérivée de f* la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.
Si f est dérivable sur I, et si f' est continue sur I, on dit que *f est de classe $\mathscr{C}^1$* sur I.

✎ Notation.

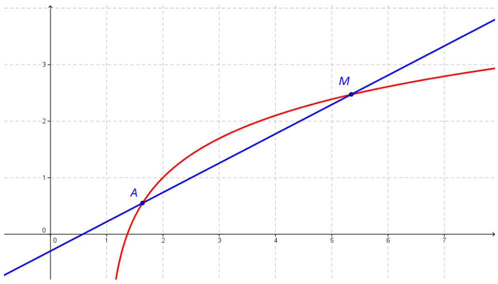
La notation $f(x)'$ est rigoureusement interdite : la quantité $f(x)$ dépend de x, c'est une expression et non une fonction ! Par exemple, si $f : x \mapsto e^{\sin(2x)}$, la rédaction suivante pour le calcul de sa dérivée est incorrecte :

✗ $f'(x) = \left(e^{\sin(2x)}\right)' = (\sin(2x))'\, e^{\sin(2x)} = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$.

Pour dériver cette expression, il est nécessaire de préciser par rapport à quelle variable on dérive. On peut la remplacer par la notation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$: le « $\mathrm{d}x$ » indique qu'on dérive par rapport à la variable x. On peut ainsi rédiger :

✓ $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\sin(2x)}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(2x)) \times e^{\sin(2x)} = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$.

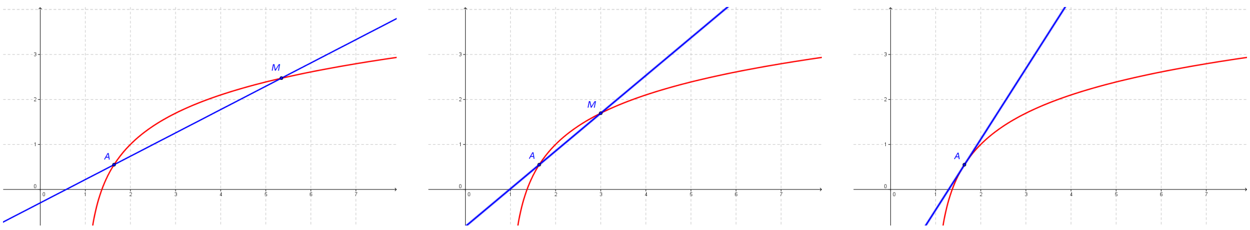
Interprétation géométrique. Fixons $a \in I$ et considérons $m \in I$, $m \neq a$. On note $A(a, f(a))$ et $M(m, f(m))$ un point distinct de A appartenant à la courbe représentative de f.



Rappelons que la droite (ou corde) (AM) a pour équation cartésienne :

$$y = \frac{f(m) - f(a)}{m - a}(x - a) + f(a).$$

Par définition, f est dérivable en a si, et seulement si, le coefficient directeur de la corde (AM) admet une limite finie quand m tend vers a.



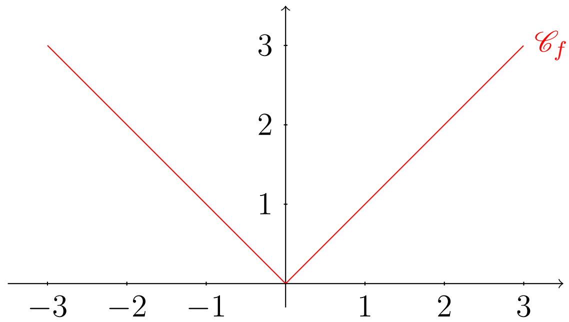
Dans ce cas, la position limite de la droite (AM) lorsque M tend vers A est la *tangente* à $\mathscr{C}_f$ au point A. Son coefficient directeur est donc $f'(a)$, et son équation cartésienne est :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a).}$$

Exemple. La fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Étudions sa dérivabilité en 0 :

$$\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \to 0^+ \\ -1 & \text{si } x \to 0^- \end{cases}.$$

Elle n'est donc pas dérivable en 0 : sa courbe représentative présente en 0 un point anguleux, et donc n'y admet pas de tangente.



Courbe représentative de la fonction valeur absolue.

Propriété 9 (La dérivabilité implique la continuité - ✎)

Si f est dérivable en a, **alors** f est continue en a.

Danger.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point et non dérivable en ce point. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 et non dérivable en 0.

2.4 Dérivées et opérations

Propriété 10 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient f, g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- La combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est encore dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

- Le produit $f \times g$ est encore dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- Si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

- Si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Propriété 11 (Composée de fonctions dérivables)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J, et soit g une fonction dérivable sur J. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\left(f(x)\right).$$

Corollaire 12 (✎)

Soit u une fonction dérivable sur I.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u^n est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

  $$(u^n)'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1}.$$

  Ceci est encore valable si $n < 0$ à condition que u ne s'annule pas sur I.
- La fonction e^u est dérivable sur I, et $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- Si u ne s'annule pas sur I, $\ln(|u|)$ est dérivable, et pour tout $x \in I$, $(\ln(|u|))'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exercice 6 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln(x^2+2))^4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2.5 Dérivée et monotonie

Propriété 13

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
f est croissante (resp. décroissante) sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

⚠ **Mise en garde.**

Il est indispensable que I soit un **intervalle**. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leq 0$. Pourtant, nous avons déjà mentionné précédemment que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
Le problème vient évidemment du fait que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. En revanche, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont des intervalles, sur lesquels f est décroissante puisque sa dérivée y est négative.

Exercice 7 Déterminer les extremums éventuels sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$.

Corollaire 14 (✎)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Corollaire 15 (✎)

Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F_2(x) = F_1(x) + c$.

Propriété 16 (✎)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est positive (respectivement négative) sur I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Remarque. En particulier, si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Exemple. Soit $f : x \mapsto x^3$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f' est positive sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule qu'en 0. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Montrer que pour tout $x, y \in \,]-1, 1[$, $\dfrac{x-y}{1+xy} \in \,]-1, 1[$.

Exercice 9 Montrer que la fonction $g : x \mapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.6 Dérivées d'ordre supérieur

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On définit récursivement :

- pour $n = 0$, on note $f^{(0)} = f$;
- pour $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est bien définie et dérivable sur I, alors on note $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Si, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n *fois dérivable sur* I, et on appelle $f^{(n)}$ *la dérivée* $n^{\text{ème}}$ *de* f *sur* I.
Si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f *est indéfiniment dérivable sur* I.

Remarques.

- Si f est n fois dérivable, alors elle est k fois dérivable pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

  Au contraire, si $f^{(n)}$ n'existe pas, alors aucune des dérivées d'ordre supérieur n'existent.

- Les théorèmes opératoires sur les fonctions dérivables s'étendent au cas des fonctions k fois dérivables ou indéfiniment dérivables. Par exemple, si deux fonctions indéfiniment dérivables sur un intervalle I, alors leur produit est indéfiniment dérivable sur I.

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrer que f est indéfiniment dérivable, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

3 Tracé du graphe d'une fonction

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

3.1 Transformations affines du graphe d'une fonction

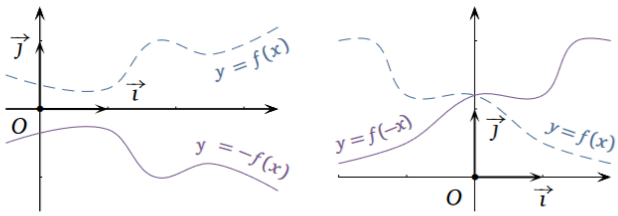
Propriété 17 (✎)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

- **Symétries :**

  Le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox).

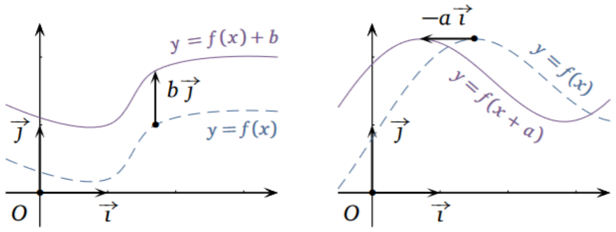
  Le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Oy).



- **Translations :**

  Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + b$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $b\overrightarrow{j}$.

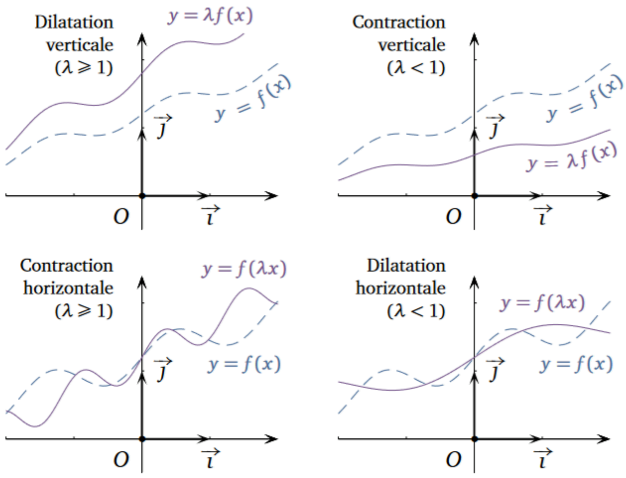
  Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$.



- **Contractions/dilatations :**

  Le graphe de la fonction $x \mapsto \lambda f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une dilatation verticale de rapport λ si $\lambda \geq 1$ et une contraction verticale de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.

  Le graphe de la fonction $x \mapsto f(\lambda x)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de rapport λ si $\lambda \geq 1$ et une dilatation horizontale de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ si $\lambda < 1$.



Corollaire 18 (✎)

- Si f est T-périodique, $\mathscr{C}_f$ est invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$.
- Si f est paire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- Si f est impaire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

3.2 Réduction du domaine d'étude

Méthode. Réduction du domaine de définition.

Avant d'étudier une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, on essaie de réduire autant que faire se peut le domaine sur lequel on l'étudie, en se ramenant à un intervalle plus petit puis en utilisant les éventuelles symétries que peut présenter $\mathscr{C}_f$.

- *Si f est paire ou impaire, on restreint son étude au domaine $\mathscr{D} \cap [0, +\infty[$, et on complète la courbe par une symétrie (axiale ou centrale).*
- *Si f est T-périodique, on restreint son étude à un segment de longueur T, et on complète la courbe par translation de vecteur $T\vec{i}$.*

Exercice 11 Déterminer le domaine d'étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{\cos^2(x) + 1}$.

3.3 Asymptotes

Définition.

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]c, +\infty[$ (resp. $]-\infty, c[$).
La droite D d'équation $y = ax + b$ est *asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de* $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \quad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0\text{)}.$$

Si $a = 0$, on dit que D est une *asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$*, sinon on parlera d'*asymptote oblique*.
Si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite $x = c$ est une *asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$*.

Remarques.

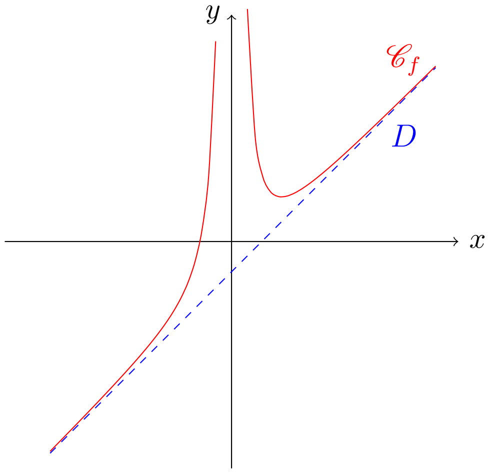
- Une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$ est une droite qui « ressemble au voisinage de l'infini » à $\mathscr{C}_f$.
- f possède la droite horizontale d'équation $y = b$ comme asymptote en $+\infty$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.
- Si f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ (avec $a \neq 0$), alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) + ax + b = \lim_{x\to+\infty} ax + b = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x-2+\dfrac{2}{x^2} \end{array}$. Alors la droite D d'équation $y = 3x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$ car :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (3x-2) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

D'autre part, puisque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to 0^-} f(x)$, sa courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale en 0.



Propriété 19 (✎)

La droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases}.$$

Remarque. Par unicité de la limite, les formules ci-dessus prouvent qu'une asymptote, si elle existe, est unique.

Exercice 12 Déterminer les asymptotes éventuelles aux courbes des fonctions suivantes :

- $f : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3x^4-5x^3+3}{x^3-1} \end{array}$;
- $g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+\ln(x) \end{array}$.

4 Introduction à la notion de bijection

4.1 Définition, premières propriétés

Définition.

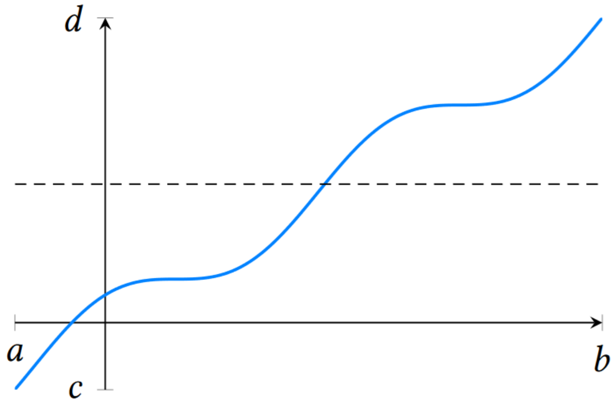
Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to J$.

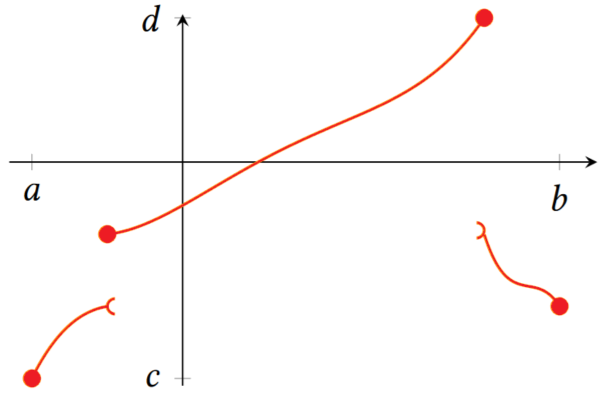
On dit que f *réalise une bijection de I sur J* si tout élément de J admet un unique antécédent par f. Autrement dit, pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

On appelle alors *bijection réciproque* la fonction notée f^{-1} définie sur J et à valeurs dans I, qui à tout $y \in J$ associe l'unique antécédent de y par f, de sorte que :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}.$$

Interprétation graphique. f est une bijection de I sur J si, et seulement si, toute droite horizontale d'ordonnée dans J rencontre une et une seule fois $\mathscr{C}_f$.





Deux bijections de $[a,b]$ *sur* $[c,d]$.

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$ une fonction affine avec $a \neq 0$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on résout :

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = ax+b \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-b}{a}.$$

Puisque l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une unique solution, c'est que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et la bijection réciproque de f est la fonction $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{y-b}{a}$. Notons que f^{-1} est elle-même affine, de coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.

Exercice 13 Soit g la fonction définie par $g : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to &]-\infty,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$. Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Propriété 20 (✎)

Soit $f : I \to J$ une bijection.

- $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_J$.
- f^{-1} est réalise une bijection de J sur I, et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque. Si $f : I \to J$ est une bijection, et si $a, b \in I$, on a l'équivalence :

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = f(b).$$

L'implication directe est toujours vraie, que f soit bijective ou non. Pour la réciproque, si f est bijective et si $f(a) = f(b)$, on obtient en appliquant f^{-1} aux deux membres de l'égalité :

$$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(b)), \text{ soit } a = b.$$

Ce résultat est particulièrement utile lorsqu'on résout une équation en procédant par équivalence.

Propriété 21 (✎)

Soit $f : I \to J$ une bijection.

- Si f est monotone, alors elle est strictement monotone.
- Si f est monotone, alors f^{-1} est également monotone, de même monotonie que f.

4.2 Graphe de la bijection réciproque

Propriété 22 (✎)

Si f est une bijection de I sur J, alors le graphe de f^{-1} est obtenu à partir de celui de f via la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (cette droite est généralement appelée la *première bissectrice*).

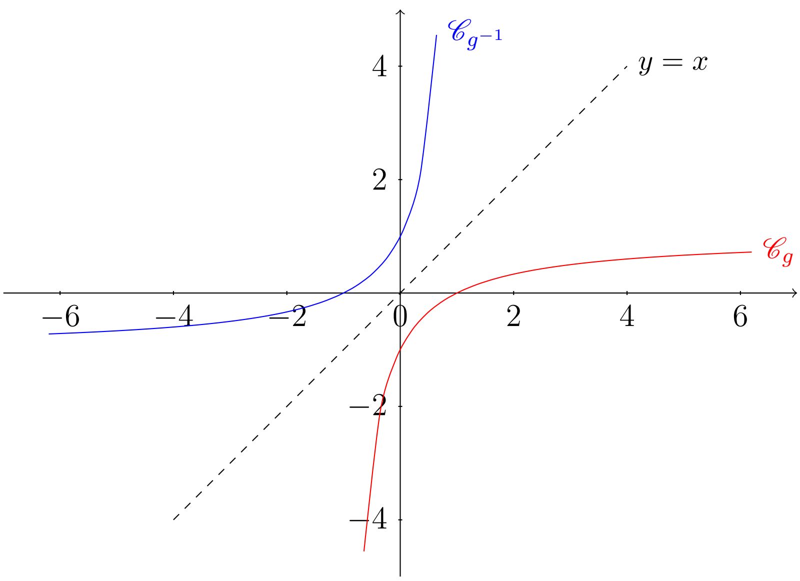
Exemple. Les courbes représentatives de

$$g : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to &]-\infty,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$$

et de

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc}]-\infty,1[& \to &]-1,+\infty[\\ y & \mapsto & \dfrac{1+y}{1-y} \end{array}$$

sont symétriques par rapport à la première bissectrice du plan.



4.3 Le théorème de la bijection, alias le TVI strictement monotone

Théorème 23 (*de la bijection*)

Soit f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

- $J = f(I)$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$;
- son application réciproque f^{-1} est elle-même **continue** sur J, **strictement monotone** et de **même sens de variation** que f.

Corollaire 24

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I. Pour tout $c \in J = f(I)$, l'équation $f(x) = c$ possède une unique solution.

Méthode. Comment montrer qu'une fonction est bijective ?

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J. Pour montrer que f réalise une bijection de I sur J, on pourra utiliser l'une des méthodes suivantes.

- **Méthode 1 : par le théorème de la bijection.**

  *On montre que f est **continue** et **strictement monotone** sur I et que $J = f(I)$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de l'intervalle I sur J.*

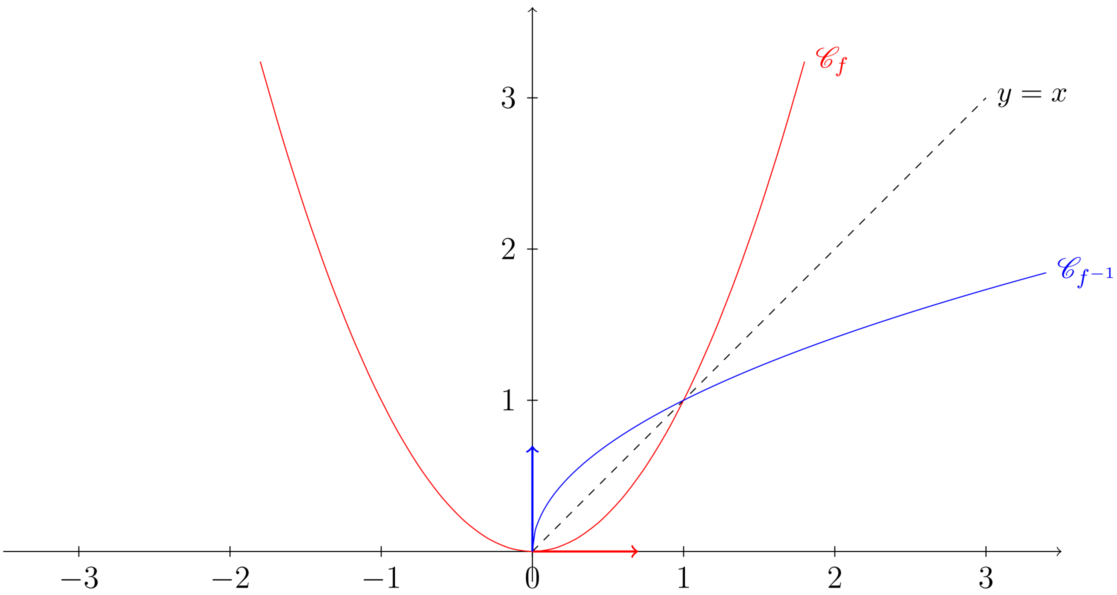
  Cette méthode, simple à appliquer, ne donne cependant pas l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

- **Méthode 2 : par résolution de l'équation $y = f(x)$.**

  On montre que pour tout $y \in J$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in I$ possède une unique solution qui est $x = f^{-1}(y)$.

  Cette méthode n'aboutit pas toujours (il n'est pas toujours possible d'expliciter une solution de l'équation $y = f(x)$). Mais lorsque c'est le cas, elle fournit l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans l'intervalle $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On appelle sa bijection réciproque la fonction *racine carré*, notée $f^{-1} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$. Toujours par le théorème de la bijection, f^{-1} est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.



Courbes représentatives des fonctions carré et racine carré, symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exercice 14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I = [-1, 0]$ sur un intervalle J à déterminer. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1, 0]$.

4.4 Dérivabilité de la bijection réciproque

Propriété 25 (Dérivée de l'application réciproque d'une bijection)

Soit f une fonction bijective de I sur J, et soit $(x, y) \in I \times J$ tel que $y = f(x)$.
La bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en y si, et seulement si, f est dérivable en x et $f'(x) \neq 0$. Dans ce cas :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Si f est **dérivable** sur I et si f' **ne s'annule pas** sur I, alors f^{-1} est **dérivable** sur J.

Remarques.

- La dérivée est admise à ce stade, mais la formule se retrouve facilement : en dérivant la relation $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_J$, on obtient $(f^{-1})' \times f' \circ f^{-1} = 1$.
- On peut remplacer dans la propriété ci-dessus « dérivable » par « k fois dérivable » pour tout $k \in \mathbb{N}$ ou par « indéfiniment dérivable ».

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est dérivable (car polynomiale) et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 2x$. Ainsi, $f'(x) \neq 0$ si, et seulement si, $x \neq 0$. Par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, la fonction racine carrée f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R}_+^*$, et pour $y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Interprétation géométrique. On peut retrouver la formule de la dérivée de l'application réciproque par un argument géométrique. En effet, la courbe de f^{-1} s'obtenant à partir de celle de f via une symétrie par rapport à la première bissectrice, il en est de même pour les tangentes : pour tout $(a, b) \in I \times J$ tel que $b = f(a)$, à la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(a, f(a))$ correspond par symétrie la tangente à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ au point $(b, f^{-1}(b))$.
Supposons $f'(a) \neq 0$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(a, f(a))$ est $f'(a)$, celui de la droite obtenue à partir de cette tangente par symétrie par rapport à la première bissectrice est $\dfrac{1}{f'(a)}$ (nous l'avions vu plus haut). Or nous venons de le noter, cette droite n'est autre que la tangente à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ en $(b, f^{-1}(b))$, de coefficient directeur $(f^{-1})'(b)$. Ainsi :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Dans le cas où $f'(a) = 0$, $\mathscr{C}_f$ possède une tangente horizontale en $(a, f(a))$. Par symétrie, $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ possède une tangente verticale en $(b, f^{-1}(b))$.

Exemple. La courbe représentative de $x \mapsto x^2$ possède une tangente horizontale en $(0, 0)$, celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ présente une tangente verticale en $(0, 0)$.