Chapitre 6

Systèmes linéaires

Compétences attendues.

✓ Savoir échelonner un système ou une matrice à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.

✓ Identifier inconnues principales, inconnues paramètres et rang d'un système, et effectuer la remontée du système.

✓ Interpréter géométriquement l'ensemble des solutions d'un petit système.

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Généralités sur les systèmes d'équations linéaires

Dans ce chapitre, n et p sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

1.1 Définitions

Définition.

- On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues* un système de la forme :

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

  où les $x_j \in \mathbb{K}$ sont appelés les *inconnues* du système, les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont les *coefficients* du système, et les $b_i \in \mathbb{K}$ forment le *second membre* du système.

- Lorsque les b_i sont tous nuls, on dit que le système $(\mathscr{S})$ est *homogène*.

  Dans le cas général, on appelle *système homogène associé à $(\mathscr{S})$* le système $(\mathscr{S}_0)$ obtenu en remplaçant le second membre $(b_1, \ldots, b_n)$ par $(0, \ldots, 0)$.

Exemple. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$ est un système linéaire de deux équations à trois inconnues, et le système homogène associé est $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$.

Définition.

- On appelle *solution du système $(\mathscr{S})$* tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que les n équations de $(\mathscr{S})$ soient vérifiées.

- Un système dont l'ensemble des solutions est vide est dit *incompatible*. Il est dit *compatible* sinon.

Remarque. Un système homogène est toujours compatible puisqu'il possède toujours $(0, \ldots, 0)$ comme solution.

1.2 Matrices associées à un système

Définition.

On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$* toute famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de scalaires.

On note cette matrice de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dans le cas où $n = p$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

À un système linéaire, nous allons associer plusieurs matrices.

Définition.

Soit $(\mathscr{S})$ le système linéaire à n équations et p inconnues introduit plus haut.

- On appelle *matrice des coefficients* de $(\mathscr{S})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

- On appelle *colonne des seconds membres* de $(\mathscr{S})$ la matrice $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

- On définit la *matrice augmentée* associée au système $(\mathscr{S})$ par :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right).$$

Exemple. La matrice augmentée du système $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

Remarque. L'introduction des matrices associées à un système linéaire n'a ici pour vocation que de nous faciliter la rédaction de la résolution d'un système, en ne travaillant que sur les coefficients du système et en nous épargnant l'écriture des inconnues du système. Un chapitre ultérieur sera dédié au calcul matriciel.

2 Résolution de petits systèmes à coefficients réels

Dans cette section seulement, on supposera que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.1 Cas des systèmes de deux équations à deux inconnues

2.1.1 Rappels et compléments de géométrie plane

Plaçons nous dans le plan affine réel $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et notons $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

Définition.

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan, et M et N les points tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{v}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* si les trois points O, M et N sont alignés, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{v}$.

Remarque. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$.

Propriété 1

Soient $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$ deux vecteurs du plan. Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc = 0.$$

Définition.

On définit de manière équivalente une droite affine $\mathscr{D}$ du plan par la donnée :

- d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ non nul : la droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
- d'un point A et d'un vecteur normal $\vec{n}$ non nul : la droite $\mathscr{D}$ passant par A et normale au vecteur $\vec{n}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

Propriété 2

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs non nul de $\vec{\mathscr{P}}$. Notons (x_A, y_A) les coordonnées de A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et (α, β) les composantes de $\vec{u}$, (a, b) celles de $\vec{n}$.

- La droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ a pour équation paramétrique :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \vec{u} \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x - x_A = \lambda\alpha \\ y - y_A = \lambda\beta \end{cases}$$

  et pour équation cartésienne :

$$\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0.$$

- Une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et normale à $\vec{n}$ est :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{ou} \quad a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

Propriété 3

Les droites affines $\mathscr{D}$ sont les ensembles dont une équation cartésienne est de la forme suivante avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b) \neq (0, 0)$:

$$ax + by = c.$$

Le vecteur de composantes (a, b) est normal à la droite $\mathscr{D}$ et le vecteur $(-b, a)$ dirige $\mathscr{D}$.

2.1.2 Systèmes de deux équations à deux inconnues

On s'intéresse au système suivant de deux équations à deux inconnues (où (a, b) et (c, d) sont non nuls) :

$$(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} .$$

Notons $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $ax+by=e$ et $\mathscr{D}_2$ celle d'équation $cx+dy=f$. Alors un point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est solution de $(\mathscr{S})$ si, et seulement si, il appartient aux deux droites. On a alors trois cas possibles :

1. si les deux droites sont confondues, alors $\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}_2=\mathscr{D}_1$, et donc l'ensemble des solutions du système est $\mathscr{D}_1$: le système a une infinité de solutions dans ce cas.

2. si les deux droites sont parallèles et non confondues, alors $\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}_2=\emptyset$: le système n'a pas de solution.

3. si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles, leur intersection est réduite à un point : le système possède une unique solution.

Notons que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles ou confondues si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{n_1}=(a,b)$ normal à $\mathscr{D}_1$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n_2}=(c,d)$ normal à $\mathscr{D}_2$, ce qui équivaut à $ad-bc=0$. Et donc le système admet une unique solution si, et seulement si, $ad-bc\neq 0$.

Vocabulaire. La quantité $ad-bc$ est appelée *déterminant du système* $(\mathscr{S})$, et notée $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, et sera largement généralisée plus tard dans l'année.

Exemple. Le système $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ a pour déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)-1\times 1=-2\neq 0$. Il admet donc une unique solution, qui est $(0,0)$ puisque le système est homogène.

2.2 Cas des systèmes de deux équations à trois inconnues

2.2.1 Rappels de géométrie dans l'espace

Le même travail peut être effectué avec les plans de l'espace, lequel est muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Donnons simplement les définitions et résultats.

Définition.

Le *plan affine* $\mathscr{P}$ de l'espace passant par A et normal au vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

Propriété 4

Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul. Notons (x_A,y_A,z_A) les coordonnées de A et (a,b,c) les composantes de $\overrightarrow{n}$.
Le plan $\mathscr{P}$ de l'espace passant par A et normal au vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ a pour équation cartésienne :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0 \quad \text{ou} \quad a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0.$$

Propriété 5

Les plans affines $\mathscr{P}$ de l'espaces sont les ensembles dont une équation cartésienne est de la forme suivante avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$:

$$ax+by+cz=d.$$

Le vecteur de composantes (a,b,c) est normal à $\mathscr{P}$.

2.2.2 Systèmes de deux équations à trois inconnues

Intéressons nous à présent à l'étude d'un système linéaire de deux équations à trois inconnues :

$$(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$. L'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est géométriquement l'intersection de deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, c'est-à-dire :

- l'ensemble vide si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles sans être confondus : le système n'a pas de solution.
- un plan si $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$: le système possède une infinité de solutions.
- une droite si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles : le système a une infinité de solutions.

Si on ajoute une troisième équation $a''x + b''y + c''z = d''$ au système, une nouvelle possibilité apparaît, celle d'un point, intersection de trois plans en position générale.

3 Cas général

3.1 Structure des solutions d'un système linéaire

Propriété 6 (Structure des solutions d'un système homogène - ✎)

Soit $(\mathscr{S}_0)$ un système **homogène** (second membre nul) de n équations à p inconnues. Alors l'ensemble E_0 de ses solutions satisfait :

(i) $(0, \ldots, 0)$ appartient à E_0 ;

(ii) pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p) \in E_0$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$\lambda \cdot x + \mu \cdot y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_p + \mu y_p) \in E_0.$$

Exercice 1 Résoudre le système $(\mathscr{S}_0) \ : \ \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$.

Propriété 7 (Structure des solutions d'un système avec second membre - ✎)

Soit $(\mathscr{S})$ un système de n équations à p inconnues, $(\mathscr{S}_0)$ son système homogène associé (i.e. sans second membre). Notons E (resp. E_0) l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ (resp. $(\mathscr{S}_0)$). Si $y \in \mathbb{K}^p$ est solution de $(\mathscr{S})$, alors :

$$x \in E \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in E_0$$

et : $\qquad E = y + E_0 = \{y + h, \ h \in E_0\}.$

Exercice 2 Résoudre le système $(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$.

3.2 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice

Définition.

On dit que deux systèmes $(\mathscr{S}_1)$ et $(\mathscr{S}_2)$ à p inconnues sont *équivalents* s'ils possèdent le même ensemble de solutions.

Pour modifier un système en un système équivalent, nous disposons des opérations suivantes.

Définition.

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes d'un système (ou d'une matrice) l'une des trois opérations suivantes :

- multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul, qu'on notera $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$;
- échange des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$, qu'on notera $L_i \leftrightarrow L_j$;
- ajout de $\beta \cdot L_j$ à L_i avec $i \neq j$, qu'on notera $L_i \leftarrow L_i + \beta \cdot L_j$ où $\beta \in \mathbb{K}$.

Exemple.

- Dans le système $\begin{cases} -x+3y+2z=2 \\ 3x-2y+5z=4 \end{cases}$, le résultat de $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ est $\begin{cases} -x+3y+2z=2 \\ 7y+11z=10 \end{cases}$.
- Dans la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, le résultat de $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 8 (✎)

Toute opération élémentaire transforme un système en un système qui lui est équivalent.

✎ Rédaction.

On **précisera systématiquement** et à chaque étape les opérations élémentaires qu'on effectue pour passer d'un système linéaire à un autre. Par exemple :

$$\begin{cases} -x+3y+2z=2 \\ 3x-2y+5z=4 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2+3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x+3y+2z=2 \\ 7y+11z=10 \end{cases}$$

Si A et A' sont deux matrices de même taille, et si la matrice A' se déduit de A par opération élémentaire sur l'une de ses lignes, on notera $A \overset{\mathscr{L}}{\sim} A'$ en précisant l'opération élémentaire effectuée sous le symbole $\overset{\mathscr{L}}{\sim}$. On écrira par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_3}{\overset{\mathscr{L}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si l'on passe d'un système $(\mathscr{S})$ à un autre $(\mathscr{S}')$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $(\mathscr{S}')$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $(\mathscr{S})$. Et inversement. Ceci justifie la présentation matricielle pour la résolution d'un système linéaire (qui nous épargne l'écriture des inconnues du système).

3.3 Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss

Grâce à des opérations élémentaires sur les lignes du système $(\mathscr{S})$, on va se ramener à un système $(\mathscr{S}')$ plus simple à résoudre.

Définition.

- Une matrice est dite *échelonnée par lignes* si chaque ligne non nulle commence par strictement plus de zéros que la ligne précédente, i.e. si elle est de la forme générale suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  où $\oplus$ sont des réels non nuls et $*$ sont des réels.

  Les réels $\oplus$ sont appelés les *pivots* de la matrice échelonnée par lignes. Ce sont les premiers coefficients non nuls de chaque ligne non nulle.

- Un système est dit *échelonné par lignes* si sa matrice augmentée l'est.

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes, avec pour pivots 1, 2 et 7.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée par lignes.

Théorème 9 (*Pivot de Gauss*)

Tout système (ou toute matrice) peut se ramener par opérations élémentaires sur ses lignes à un système (ou une matrice) échelonné(e) par lignes.

Méthode. Descente d'un système linéaire par l'algorithme du pivot de Gauss.

Pour mettre une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (ou un système) sous forme échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes, on procèdera ainsi :

(i) on traite chaque colonne l'une après l'autre, de la première à gauche à la dernière à droite.

(ii) pour la i-ème colonne, on cherche un élément non nul parmi $a_{i,i}, \dots, a_{n,i}$. S'il y en a effectivement un :

(a) *on le place en pivot (i.e. en position (i, i)) par un échange de lignes. On choisira le pivot le plus pratique pour les calculs (1 si possible) ;*

(b) *on fait apparaitre des zéros sous le pivot par des opérations élémentaires du type $L_j \leftarrow L_j + \beta \cdot L_i$ pour $j > i$.*

Si tous les éléments $a_{i,i}, \dots, a_{n,i}$ sont nuls, on passe à la colonne $i + 1$.

Le saviez-vous ?

Cette méthode porte le nom du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss. Elle lui est pourtant bien antérieure, puisqu'elle était connue des mathématiciens chinois depuis au moins le 1er siècle de notre ère. Sa paternité reviendrait même à un certain Chang Ts'ang, chancelier de l'empereur de Chine au 2-ème siècle avant notre ère.

En Europe, cette méthode fut découverte et présentée bien plus tard, en 1810, par Carl Friedrich Gauss dans un livre étudiant le mouvement d'un astéroïde. On lui associe aujourd'hui son nom.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Exercice 3 Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée par lignes par la méthode du pivot de Gauss.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Mise en garde.

Vous pourriez être tenté de vous écarter de la méthode du pivot en pensant à d'autres opérations élémentaires qui vous sembleraient plus « intéressantes ». L'expérience montre que ce n'est jamais une réussite. Le plus efficace est de suivre strictement chaque étape du pivot de Gauss.

3.4 Résolution d'un système linéaire

En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on se ramène à un système équivalent qui est échelonné par lignes. Sa résolution se fait alors bien plus facilement comme nous allons le voir dans cette section.

3.4.1 Vocabulaire

Définition.

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire à n équations et p inconnues, $(A|B)$ sa matrice augmentée qu'on ramène par opérations élémentaires sur les lignes à une matrice échelonnée par lignes :

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{1,j_1} & \cdots & & & & & b'_1 \\ 0 & & a'_{2,j_2} & \cdots & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & & a'_{r,j_r} & \cdots & \\ & & & & 0 & & b'_{r+1} \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

- On appelle *inconnue principale* toute inconnue associée à un pivot de A'. Toute autre inconnue est appelée *inconnue secondaire* ou *inconnue paramètre*.
- r s'appelle le *rang du système* $(\mathscr{S})$. C'est le nombre de pivots dans A'.

Remarque. On montrera dans un prochain chapitre que le rang r du système $(\mathscr{S})$ est unique et ne dépend pas des opérations élémentaires effectuées sur les lignes de A, ce qui justifie la définition précédente.

Exemple. La matrice augmentée associée au système $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 7 \\ -3z & = & -2 \end{array}\right.$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right)$
Cette dernière est échelonnée par lignes. On peut donc dire que le rang du système est 2, que x et z sont des inconnues principales et y est une inconnue secondaire.

Remarque. Il résulte immédiatement de ces définitions que :

- $r \leq \min(n, p)$;
- le nombre d'inconnues paramètres du système $(\mathscr{S}')$ est $p - r$.

3.4.2 Résolution d'un système échelonné par lignes

Gardons les notations introduites précédemment. Plusieurs cas se présentent :

- Si B' contient un pivot, la dernière ligne non nulle de $(A'|B')$ est du type $0 = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$. Le système $(\mathscr{S})$ n'admet donc aucune solution.
- Supposons que B' ne contienne aucun pivot. On effectue alors la *remontée* du système échelonné.

Méthode. Remontée d'un système linéaire échelonné.

Soit $(A'|B')$ la matrice augmentée associée à un système linéaire $(\mathscr{S}')$ échelonné par lignes. Pour sa résolution, on effectue la « remontée » du système en procédant comme suit :

- *on normalise tous les pivots à 1 par des opérations élémentaires du type* $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\alpha} L_i$;
- *on annule tous les coefficients situés au-dessus des pivots à l'aide d'opérations élémentaires du type* $L_j \leftarrow L_j + \beta L_i$.

À la suite de ces opérations élémentaires, on s'est ramené à une matrice échelonnée de la forme[a] *:*

$$(A''|B'') = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & b''_1 \\ 0 & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & & & 1 & \cdots & b''_r \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

[a] On parle alors de matrice échelonnée réduite par lignes.

On a encore deux cas à distinguer :

- si $r = p$ (rang = nombre d'inconnues), alors $(A''|B'')$ est de la forme
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & b''_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & b''_p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$
et $(\mathscr{S})$ est équivalent à un système de la forme $\begin{cases} x_1 = b''_1 \\ \ \vdots \\ x_p = b''_p \\ 0 = 0 \\ \ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$. Dans ce cas, le système est compatible et admet une unique solution.
- si $r < p$, alors quitte à renuméroter les inconnues du système, $(A''|B'')$ est de la forme
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & 0 & * & \cdots & * & b''_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & * & \cdots & * & b''_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$
et $(\mathscr{S})$ est équivalent à un système de la forme $\begin{cases} x_1 = b''_1 - a''_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots + a''_{1,p}x_p \\ \ \vdots \\ x_r = b''_r - a''_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a''_{n,p}x_p \\ 0 = 0 \\ \ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$. Le système admet donc une infinité de solutions (toutes les valeurs possibles pour $x_{r+1}, \ldots, x_p$ donnant des solutions).

Résumons les résultats obtenus ici.

Propriété 10

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire à n équations et p inconnues, qu'on ramène par opérations élémentaires sur les lignes à un système échelonné de matrice augmentée $(A'|B')$.

- Si la colonne B' contient des pivots, le système $(\mathscr{S})$ est incompatible, et il ne possède aucune solution.
- Dans le cas contraire :
  - si $r = p$ (rang = nombre d'inconnues) : le système possède alors une unique solution.
  - si $r < p$: le système possède une infinité de solutions paramétrées à l'aide des $p - r$ inconnues secondaires.

Vocabulaire. Si un système a n équations, n inconnues et est de rang n, alors il est dit de *Cramer*. Par la proposition précédente, un tel système possède une unique solution.

Exemple. Le système $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ y+2z &=& 0 \\ 3z &=& 0 \end{array}\right.$ à 3 équations et 3 inconnues est échelonné par lignes, et compte 3 pivots. Il est donc de rang 3 : c'est un système de Cramer. Par conséquent, il possède une unique solution, qui est $(0,0,0)$ puisque le système est homogène.

Méthode. Résolution d'un système linéaire de A à Z.

Pour résoudre un système linéaire (avec ou sans second membre) et déterminer l'ensemble E de ses solutions, on procèdera comme suit :

(i) on ramène le système (ou la matrice augmentée) à un système échelonné par lignes par des opérations élémentaires sur les lignes. Pour cela, on suivra scrupuleusement l'algorithme du pivot, en précisant à chaque étape les opérations élémentaires effectuées.

(ii) si la colonne du second membre contient un pivot, le système est incompatible et $E = \emptyset$.

Sinon, on identifie le rang, les inconnues principales et les inconnues paramètres.

(iii) on exprime les inconnues principales en fonction ***uniquement*** *des inconnues paramètres et du second membre, en effectuant la « remontée » du système.*

(iv) on écrit E sous forme « paramétrique », c'est-à-dire en fonction des inconnues paramètres (les inconnues principales ne doivent alors plus apparaitre).

Exercice 4 Résoudre les systèmes suivants et décrire géométriquement l'ensemble des solutions :

$$(\mathscr{S}_1) : \left\{\begin{array}{rcl} x-2y+z &=& 1 \\ -y+z &=& 3 \\ 2x+y+z &=& 0 \end{array}\right. \qquad (\mathscr{S}_2) : \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y-z &=& 1 \\ x+y+2z &=& 0 \\ 3x-2y+z &=& 4 \end{array}\right. \qquad (\mathscr{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z &=& 1 \\ 2x+y+2z &=& 0 \\ x+2y+3z &=& 1 \end{array}\right.$$