Chapitre 7

Fonctions usuelles

Compétences attendues.

✓ Connaître les propriétés élémentaires des fonctions usuelles (dérivée, variations, limites, courbe représentative, croissances comparées).

✓ Maitriser les règles de calcul liées au logarithme, à l'exponentielle et aux fonctions puissances.

✓ Connaître et utiliser les formules trigonométriques circulaires et hyperboliques.

✓ Montrer une égalité ou une identité faisant intervenir les fonctions circulaires réciproques (par application d'une fonction circulaire ou par dérivation).

Mathieu Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Carnot (Dijon)

Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`

E-mail : `mathieu.mansuy@ac-dijon.fr`

1 Logarithme, exponentielle et compagnie

La fonction exponentielle a été introduite en classe de Première comme étant l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

L'existence et l'unicité d'une telle fonction avait alors été admise, et relève de résultats qui seront vus en deuxième année. La fonction logarithme népérien en a été déduite en Terminale, comme bijection réciproque de la fonction exponentielle.

Nous proposons ici une autre construction de ces deux fonctions, en partant cette fois du logarithme. Elle se base également sur une boite noire, le résultat suivant qui sera démontré en cours d'année.

Théorème 1

Une fonction continue sur un intervalle I y admet des primitives.

1.1 La fonction logarithme népérien

Propriété 2 (✎)

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une unique primitive qui s'annule en $x = 1$.
On appelle *logarithme népérien* cette primitive, et on la note ln.

Il résulte immédiatement de cette définition les points suivants.

Corollaire 3

- La fonction ln est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété 4 (✎)

Soient x, y deux réels strictement positifs. Alors :

(1) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;

(2) $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$;

(3) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$;

(4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Propriété 5

La fonction ln satisfait :

(1) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$;

(2) $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$;

(3) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$;

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

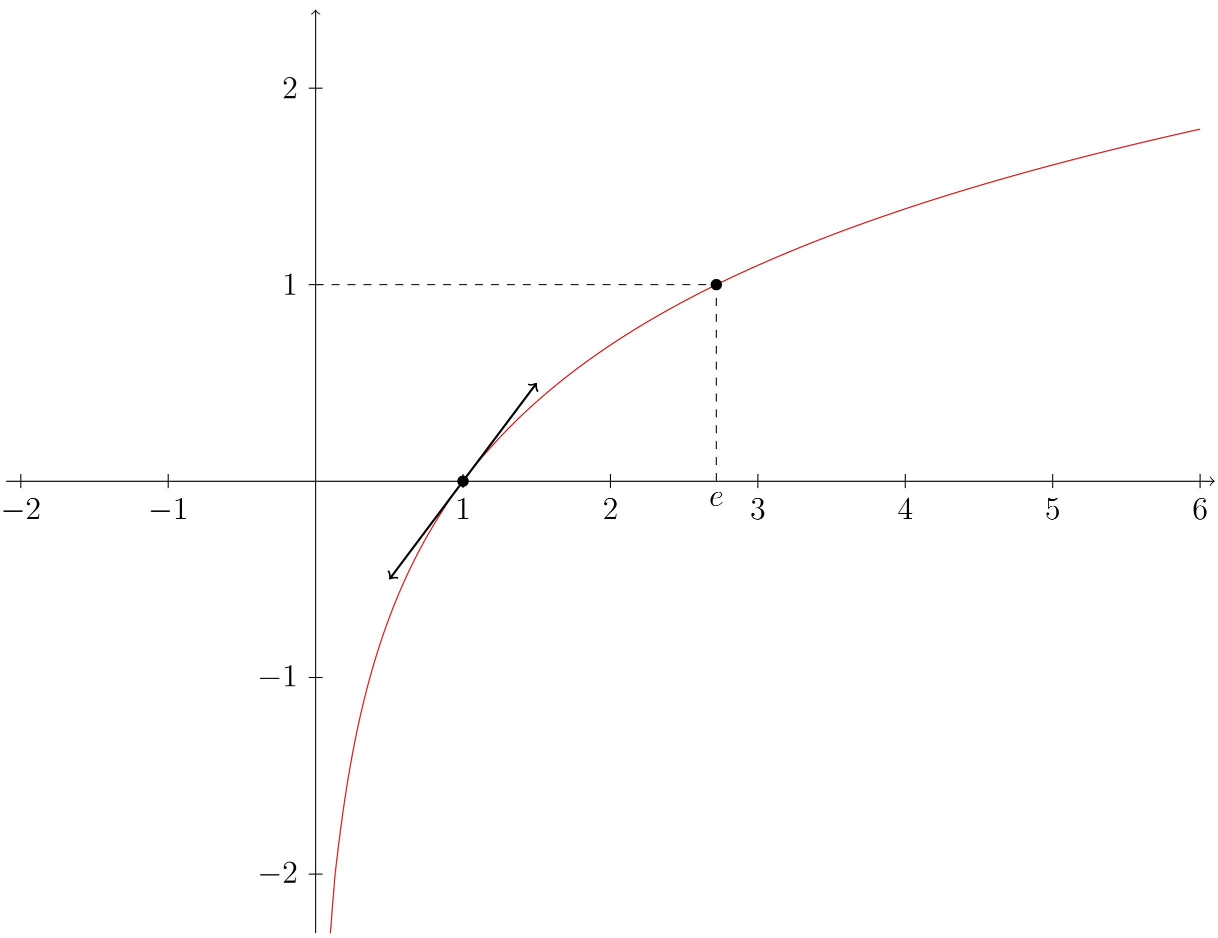
Remarque. La preuve du premier point a nécessité l'utilisation d'un résultat, le théorème de la limite monotone, que nous admettons provisoirement là encore et qui sera démontré en cours d'année.

Théorème 6

La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Définition.

On appelle *constante de Néper* l'unique réel, noté e tel que $\ln(e) = 1$.



Courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

Terminons par une inégalité classique.

Propriété 7 (✎)

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

1.2 La fonction exponentielle népérienne

On rappelle que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Définition.

On appelle *fonction exponentielle népérienne*, et on note exp, sa bijection réciproque.

De cette définition, on déduit immédiatement la :

Propriété 8 (✎)

(1) $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \ln \circ \exp(x) = x \quad$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad \exp \circ \ln(x) = x$.

(3) La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(4) La fonction exp est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \exp'(x) = \exp(x)$.

Propriété 9 (✎)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;

(2) $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$;

(3) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;

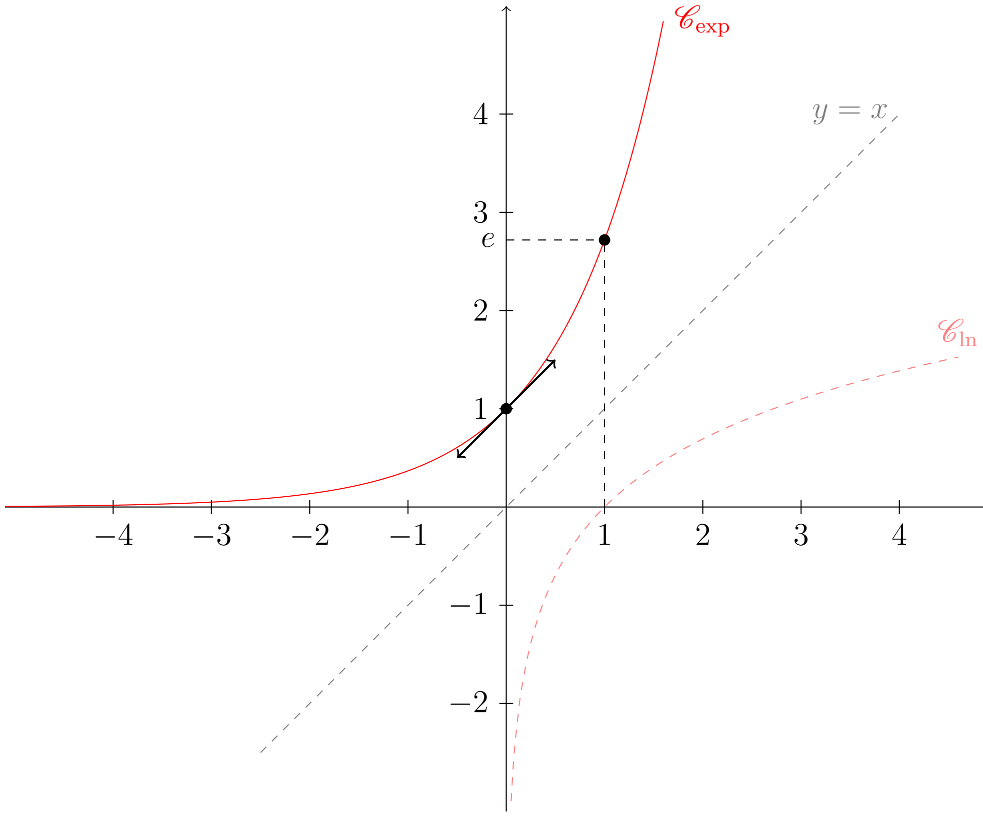
(4) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Propriété 10 (✎)

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$;

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.



Courbe représentative de la fonction exponentielle.

Terminons par une inégalité classique.

Propriété 11 (✎)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq x + 1$.

Exercice 1

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.
2. En déduire l'encadrement suivant du nombre e pour $n \geq 1$: $0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{4}{n}$.
3. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Remarque. Pour $n = 4000$, on obtient $e \approx 2.718$.

1.3 Racines n-èmes et puissances

Nous avons déjà définit la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ dans les cas suivants :

- lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$: p_n est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = x \times x \times \cdots \times x$ (n fois) ;
- lorsque $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$: p_n est définie sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et pour tout $x \neq 0$, $p_n(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$.

On souhaite étendre cette définition pour d'autres réels α : on souhaiterait par exemple donner un sens à « 3 multiplié $\frac{1}{12}$ fois par lui-même », ou encore « 2 multiplié π fois par lui-même ». On va donner deux manières naturelles de le faire.

1.3.1 Racines n-èmes

Propriété 12

Soit n un entier supérieur à 2. La fonction $p_n : x \mapsto x^n$ réalise une bijection de :

- $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ si n est impair,
- $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair.

On appelle *fonction racine n-ème* sa bijection réciproque, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ si n est impair, et sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair.

Remarque. En tant que bijection réciproque de p_n, la fonction racine n-ème est continue, strictement croissante sur son ensemble de définition. Puisque p_n y est indéfiniment dérivable et que $p_n' : x \mapsto nx^{n-1}$ s'annule si, et seulement si, $x = 0$, p_n^{-1} est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si n est pair, et sur $\mathbb{R}^*$ si n est impair. Et pour tout x dans ces ensembles respectifs :

$$\left(p_n^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{p_n'(p_n^{-1}(x))} = \frac{1}{n\left(p_n^{-1}(x)\right)^{n-1}} = \frac{p_n^{-1}(x)}{n\left(p_n^{-1}(x)\right)^{n}} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x}}{x}.$$

De même que pour la fonction racine carrée, on vérifie que pour tous réels x, y dans le domaine de définition de la fonction racine n-ème :

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} \quad \text{et pour } y \neq 0 : \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

Lorsque n est impair, on a toujours $\sqrt[n]{-1} = -1$ et pour tout $x < 0$, $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$. Attention, ces dernières formules n'ont pas de sens si n est pair !

1.3.2 Puissances quelconques

Prenons encore n un entier supérieur à 2. Avec la fonction racine n-ème, nous avons défini ce qui s'apparenterait à la fonction puissance d'exposant $\alpha = \dfrac{1}{n}$. Ce processus s'arrête cependant ici, et ne s'étend pas à d'autres réels α, aux irrationnels. Une autre manière de procéder est de constater que pour tout $x > 0$:

$$x^n = \left(\exp(\ln(x))\right)^n = \exp(n\ln(x)).$$

Cette dernière expression ayant un sens lorsque n est réel, nous obtenons ici un moyen naturel d'étendre la définition de la fonction puissance p_α à tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle *fonction puissance d'exposant α* la fonction p_α définie pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$p_\alpha(x) = \exp\left(\alpha\ln(x)\right), \text{ qu'on note } x^\alpha.$$

Danger.

La définition $x^y = \exp(y\ln(x))$ n'est valable que pour x **strictement positif** à cause du logarithme.

Remarque. Comme mentionné plus haut, pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la fonction p_α coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction puissance α usuelle : pour tout $x > 0$, $p_\alpha(x) = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ fois}}$.

Notation.

Pour $x = e$ et $y \in \mathbb{R}$, nous obtenons :

$$e^y = \exp(y \ln(e)) = \exp(y).$$

Ceci nous autorise à noter l'exponentielle comme une puissance, ce que nous ferons à partir de maintenant.

Exercice 2 Soit $x > 1$. Simplifier l'expression $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$.

Propriété 13 (Propriétés algébriques des puissances - ✎)

Pour tous $x, y > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(1) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$;

(2) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;

(3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;

(4) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;

(5) $\dfrac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$.

Remarque. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur à 2. Pour tout $x > 0$:

$$p_n\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{1}{n} \times n} = x^1 = x, \qquad \text{d'où :} \quad x^{\frac{1}{n}} = p_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Ainsi, les fonctions $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ et $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$. Autrement dit, $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ n'est autre que la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction racine n-ème.

1.3.3 Étude des fonctions puissances

Propriété 14 (✎)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

(1) la fonction puissance d'exposant α est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(2) $$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}.$$

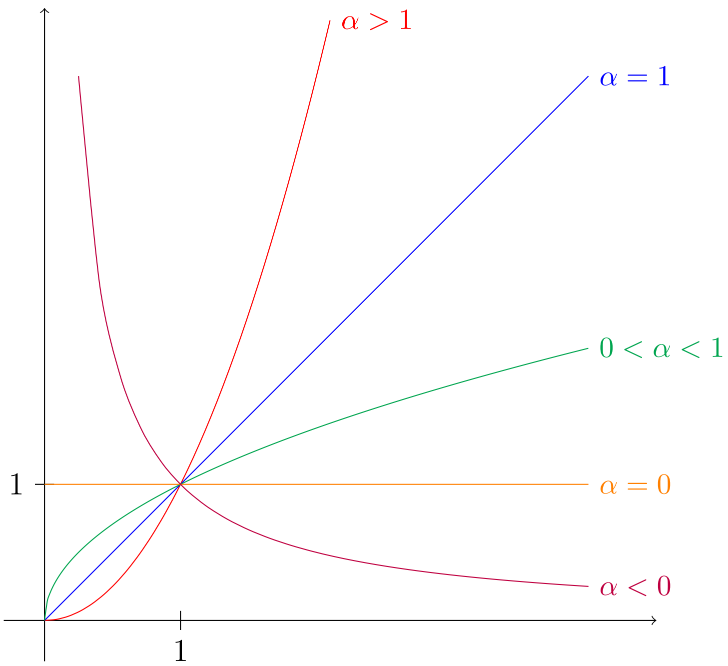
(3) si $\alpha \neq 0$, alors p_α réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante sinon. De plus, $p_\alpha^{-1} = p_{1/\alpha}$.

Remarque. La fonction p_α est a priori définie uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$, mais si $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} p_\alpha(x) = 0$, si bien que p_α se prolonge par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.

La question se pose alors de savoir si ce prolongement par continuité est dérivable en 0. Mais pour $x > 0$, on a :

$$\frac{p_\alpha(x) - p_\alpha(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha - 1} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Donc p_α est dérivable en 0 si, et seulement si, $\alpha \geq 1$, et dans ce cas, $p'_\alpha(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$. Pour $\alpha < 1$, la courbe représentative de p_α admet une tangente verticale en 0.



Représentation graphique de fonctions puissances.

Propriété 15 (*Croissances comparées -*)

Pour tous $\alpha, \beta > 0$:

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$;

(2) $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$;

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

Terminons cette section par un point méthode qui nous sera utile en TD.

Méthode. Comment étudier une fonction de la forme $u(x)^{v(x)}$?

Si une fonction est donnée sous la forme $u(x)^{v(x)}$ avec u à valeur strictement positive, on veillera à se ramener à une écriture exponentielle $\exp(v(x)\ln(u(x)))$ pour en simplifier l'étude.

Remarque. On prendra garde à la « nouvelle » forme indéterminée 1^∞, qui ne l'est pas tant que ça si on la récrit $\exp(\infty \times \ln(1)) = \exp(\infty \times 0)$. On pensera là aussi à l'écriture exponentielle pour tenter de lever l'indétermination.

Exercice 3 Retrouver la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1.4 Fonctions exponentielle et logarithme en base a

Définition.

Si $a > 0$ est différent de 1, on appelle *logarithme en base a* la fonction notée $\log_a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarques.

- Si $a = e$, la fonction $\log_e$ n'est autre que la fonction ln.
- Lorsque $a = 10$, on parle plutôt de *logarithme décimal*, qu'on note alors simplement log. Elle satisfait $\log(10^k) = \dfrac{\ln(10^k)}{\ln(10)} = \dfrac{k\ln(10)}{\ln(10)} = k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, puisque $\log(46!) \approx 57,76$, on en déduit que 46! est un nombre à 58 chiffres.

  Cette fonction est très utile en physique et en chimie. Le ph par exemple, est le logarithme décimal des concentrations. La magnitude d'un séisme est le logarithme décimal de son amplitude.

On vérifie aisément les propriétés suivantes à partir de celles satisfaites par le logarithme népérien.

Propriété 16

Soit $a > 0$, $a \neq 1$. Alors :

- la fonction $\log_a$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$
- elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante sinon, et vérifie $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$.
- pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \quad \log_a(x^n) = n\log_a(x).$$

Définition.

Pour $a > 0$, $a \neq 1$, on appelle *exponentielle de base a*, et on note $\exp_a$, la bijection réciproque de $\log_a$.

Remarque. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\log_a(\exp_a(x)) = x \Leftrightarrow \ln(\exp_a(x)) = x\ln(a) \Leftrightarrow \exp_a(x) = e^{x\ln(a)} \Leftrightarrow \exp_a(x) = a^x.$$

1.5 Les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques

Rappelons que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

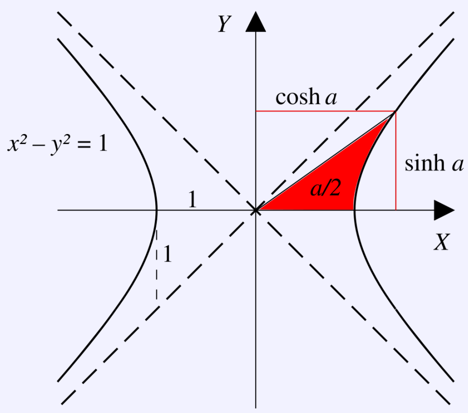
Définition.

On appelle :

- *cosinus hyperbolique*, et on note ch ou cosh, la partie paire de la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
- *sinus hyperbolique*, et on note sh ou sinh, la partie impaire de la fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
- *tangente hyperbolique*, et on note th ou tanh, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Le saviez-vous ?

Les fonctions hyperboliques ont été inventées par le jésuite Vincenzo Riccati dans les années 1760 alors qu'il cherchait à calculer l'aire sous l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$. La méthode géométrique qu'il employa alors était très similaire à celle que l'on peut utiliser pour calculer l'aire d'un cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Le calcul de l'aire du cercle fait intervenir les fonctions trigonométriques classiques que Riccati nommait cosinus et sinus circulaires. Par analogie, il appela alors les fonctions qu'il venait de créer cosinus et sinus hyperboliques. Ce fut un choix heureux, car cette ressemblance ne s'arrête pas à la méthode de calcul d'aire, mais aussi à toutes les formules trigonométriques.

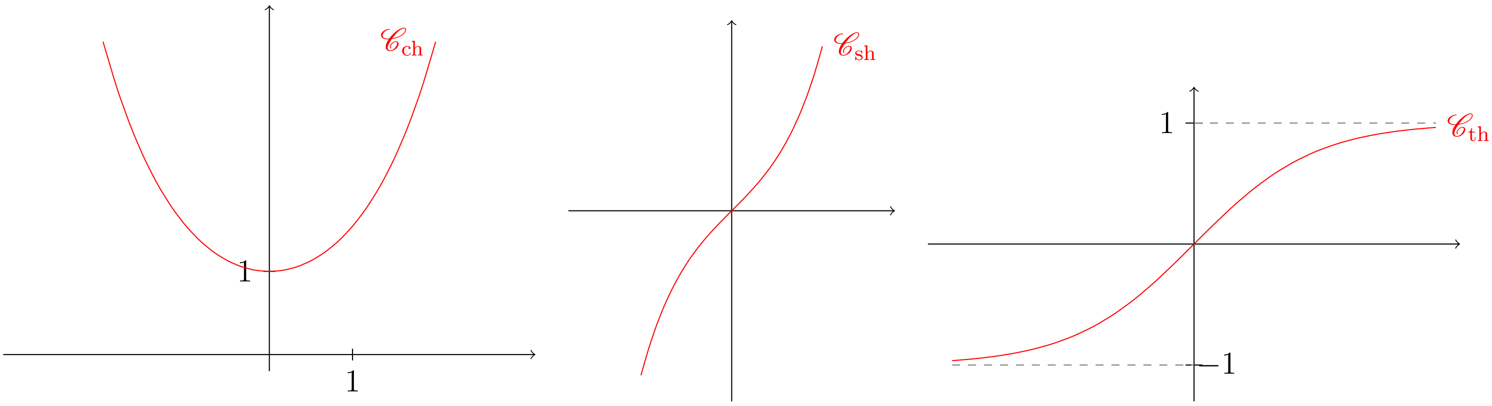


Propriété 17

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1.$$

Propriété 18

- La fonction ch est paire, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$. De plus, on a $\operatorname{ch}(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$.
- La fonction sh est impaire, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$. De plus, on a $\operatorname{sh}(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$.
- La fonction th est impaire, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$$
De plus, on a $\operatorname{th}(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$.



Courbes représentatives des fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques

Remarque. La courbe représentative de la fonction ch, ou plus généralement celle des fonctions $x \mapsto a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ pour $a > 0$, sont communément appelées « chainettes », car elles correspondent à la forme que prend un câble suspendu dans le vide entre deux points.

Astuce.

La manipulation des fonctions trigonométriques hyperboliques peut nous amener à travailler avec des sommes d'exponentielles. Rappelons que :
$$e^a + e^b \neq e^{a+b}.$$
Une astuce souvent utile pour manipuler des quantités de la forme $e^a \pm e^b$ est de factoriser par $e^{\frac{a+b}{2}}$, ce qui permet alors de faire apparaître des ch ou des sh.

Exercice 4 Exprimer $\dfrac{e^a - e^b}{1 + e^b}$ en faisant apparaitre des cosinus et sinus hyperboliques.

2 Fonctions circulaires et circulaires réciproques

2.1 Les fonctions circulaires

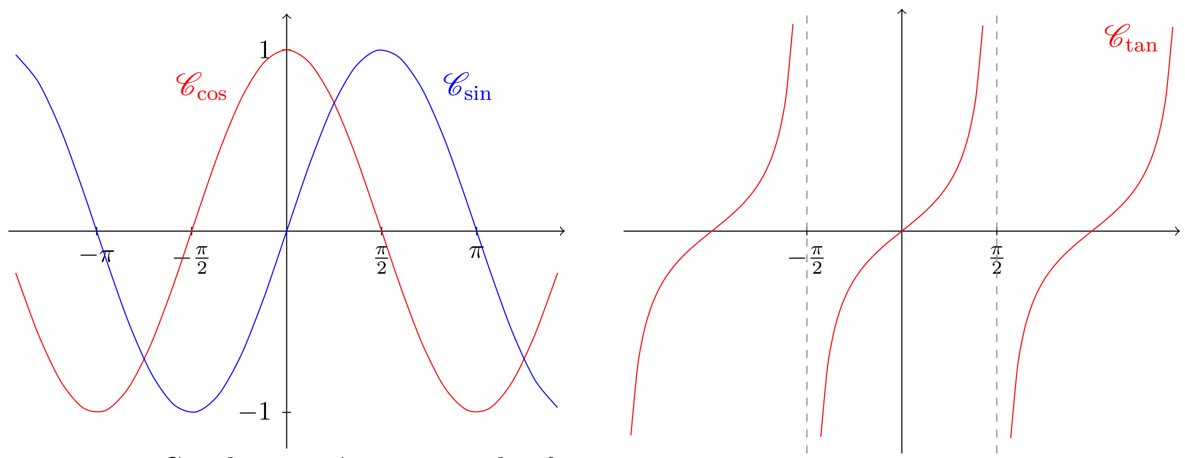
Propriété 19

- La fonction *cosinus* définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$ est paire et 2π-périodique.
- La fonction *sinus* définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$ est impaire et 2π-périodique.
- La fonction *tangente* définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $x \mapsto \tan(x)$ est impaire et π-périodique.

Propriété 20

- Les fonctions sinus et cosinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, et :
$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin.$$
- La fonction tangente est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2.$$

Puisqu'on sait que $\cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ et que $\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, on en déduit facilement les sens de variations de ces fonctions.



Courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente.

Remarque. Notons en particulier que :
$$\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Et donc dériver sinus ou cosinus, c'est déphaser de $\frac{\pi}{2}$. Ceci permet aisément de calculer les dérivées successives de sin ou cos :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Propriété 21 (Formes indéterminées en 0 - ✎)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

Terminons par une inégalité classique.

Propriété 22 (✎)

Pour tout réel x, on a : $\quad |\sin(x)| \leq |x|$.

La fonction cotangente n'est pas au programme, mais vous pourriez être amenés à la rencontrer dans des exercices.

Définition.

On appelle cotangente, et on note cotan la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par :

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Mise en garde.

On n'a pas $\operatorname{cotan} = \dfrac{1}{\tan}$ car ces deux fonctions n'ont pas le même domaine de définition.

En revanche, il est vrai que si $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} = \left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, alors $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$.

2.2 Fonctions circulaires réciproques

2.2.1 La fonction arcsin

Propriété 23 (✎)

La fonction $\sin_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
On appelle alors *arc sinus* et on note arcsin sa bijection réciproque :

$$\arcsin : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}.$$

Propriété 24

(1) La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$ et impaire. Elle est de plus indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$, et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$.

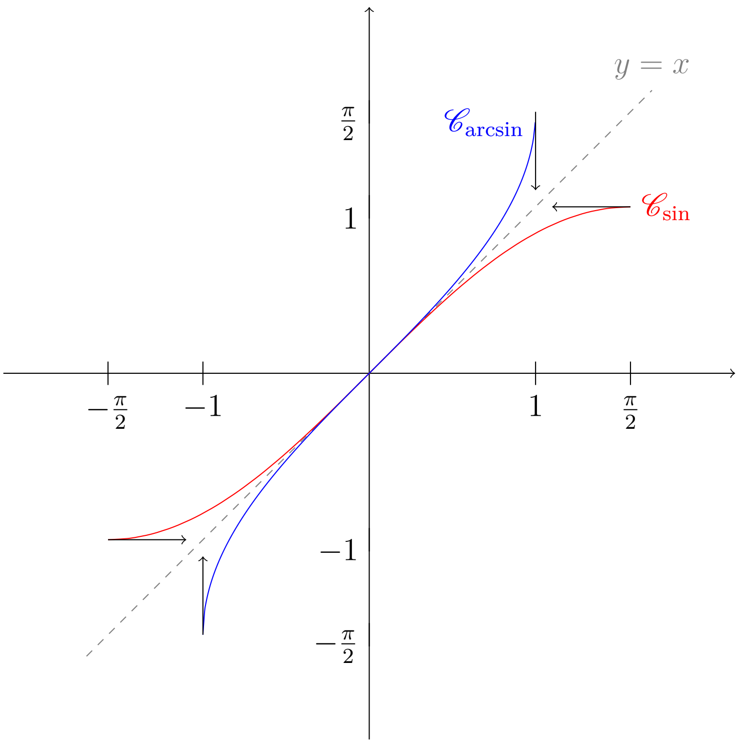
(3) En revanche, $\arcsin(\sin(x)) = x$ **uniquement si** $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(4) Pour tout $(x,\theta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\theta = \arcsin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\theta) = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Danger.

Insistons bien, on n'a pas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin(x)) = x$: la fonction arcsin n'est pas la bijection réciproque de sin sur $\mathbb{R}$, mais uniquement la bijection réciproque de sin restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Courbes représentatives des fonctions sin *et* arcsin.

Remarque. Certaines valeurs de la fonction arcsin doivent être connues sans hésitation, en lien avec les valeurs remarquables de la fonction sinus. Par exemple, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 5 Calculer $\arcsin\left(\sin\left(\frac{18\pi}{7}\right)\right)$.

2.2.2 La fonction arccos

Propriété 25

La fonction $\cos_{[0,\pi]}$ réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
On appelle alors *arc cosinus* et on note arccos sa bijection réciproque :

$$\arccos : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos(x) \end{array}.$$

Propriété 26

(1) La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$. Elle est de plus indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$, et :

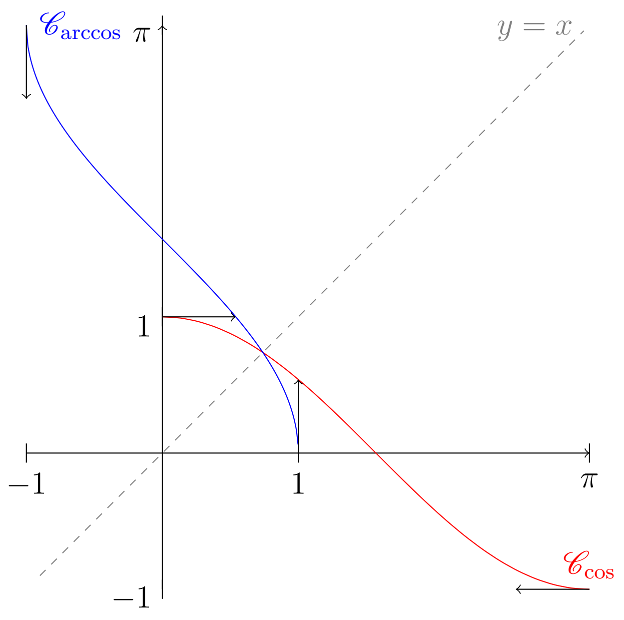
$$\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$.

(3) En revanche, $\arccos(\cos(x)) = x$ **uniquement si** $x \in [0, \pi]$.

(4) Pour tout $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\theta = \arccos(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = x \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases}.$$



Courbes représentatives des fonctions cos *et* arccos.

Remarque. Toutes les valeurs déjà connues pour le cos se traduisent en termes d'arccos. Par exemple, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

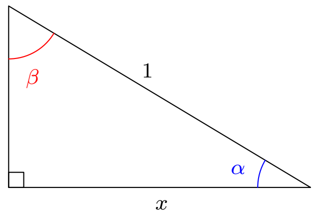
Exercice 6 Résoudre l'équation $\arccos(x) = \arcsin\left(\dfrac{12}{13}\right)$ d'inconnue $x \in [-1, 1]$.

Propriété 27

Pour tout $x \in [-1,1]$, $\quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Remarque. Cette relation a en fait une interprétation géométrique simple si $x \in]0,1[$. En effet, si l'on se place, comme dans la figure ci-contre dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 1 et l'un des côtés vaut x, on a $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. Mais $\cos(\alpha) = \frac{x}{1} = x$, de sorte que $\alpha = \arccos(x)$ et de même, $\sin(\beta) = \frac{x}{1}$, et donc $\beta = \arcsin(x)$. Ainsi :

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{2} = \arccos(x) + \arcsin(x).$$



2.2.3 La fonction arctan

Propriété 28

La fonction tan réalise une bijection strictement croissante de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

On appelle *arc tangente* et on note arctan sa bijection réciproque :

$$\arctan : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}.$$

Danger.

Bien que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, on n'a absolument pas $\arctan = \dfrac{\arcsin}{\arccos}$.

Propriété 29

(1) La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, impaire, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$. De plus, elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

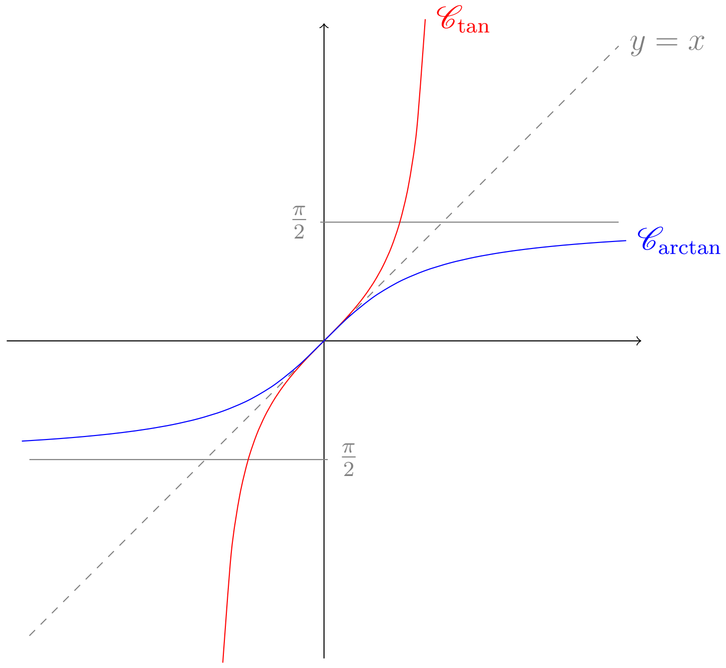
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(2) Pour tout $x \in [-1,1]$, $\tan(\arctan(x)) = x$.

(3) En revanche, $\arctan(\tan(x)) = x$ **uniquement si** $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

(4) Pour tout $(x,\theta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\theta = \arctan(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(\theta) = x \\ \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}.$$



Courbes représentatives des fonctions tan *et* arctan.

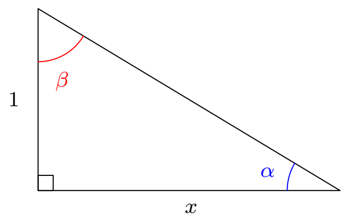
Remarque. On obtient des valeurs remarquables de arctan à partir de celles de tan, par exemple $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, $\arctan(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$, $\arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 7 Calculer $\theta = \arctan\dfrac{1}{3} + \arctan\dfrac{1}{7}$.

Propriété 30

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\qquad \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

Remarque. Cette relation a également une interprétation géométrique simple si $x > 0$: dans le triangle rectangle ci-contre, $\tan(\alpha) = \frac{1}{x}$ et donc $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, et $\tan(\beta) = x$ de sorte que $\beta = \arctan(x)$. On conclut en notant que $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.



Méthode. Égalités faisant intervenir des fonctions circulaires réciproques.

Pour montrer une égalité faisant intervenir les fonctions trigonométriques réciproques, on peut :

- *essayer de montrer que les cosinus, sinus ou tangentes des deux membres sont égaux. Attention, ceci ne montre qu'une congruence entre les deux termes ;*
- *encadrer les deux membres pour transformer cette congruence en égalité.*

Pour montrer une identité faisant intervenir des fonctions circulaires réciproques, on peut également essayer de dériver, puis évaluer en un point bien choisi.

Formules sur les dérivées

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
e^x $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	e^x
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$]0,+\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$ $(x \in [0,+\infty[)$	$]0,+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$
$\arccos(x)$	$]-1,1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$
$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$
$\text{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1-\text{th}(x)^2 = \dfrac{1}{\text{ch}(x)^2}$