DM1

Correction du devoir maison

1. On a :

$$\begin{aligned}
A\Delta E &= (A\backslash E)\cup(E\backslash A) = \emptyset \cup \bar{A} = \bar{A}\\
A\Delta A &= (A\backslash A)\cup(A\backslash A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset\\
A\Delta \emptyset &= (A\backslash \emptyset)\cup(\emptyset\backslash A) = A \cup \emptyset = A\\
A\Delta \bar{A} &= (A\backslash \bar{A})\cup(\bar{A}\backslash A) = A \cup \bar{A} = E
\end{aligned}$$

2. Une preuve par double inclusion est possible. Mais préférons le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A\backslash B)\cup(B\backslash A) = (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\\
&= ((A\cap\bar{B})\cup B)\cap((A\cap\bar{B})\cup\bar{A})\\
&= ((A\cup B)\cap\underbrace{(\bar{B}\cup B)}_{=E})\cap(\underbrace{(A\cup\bar{A})}_{=E}\cap(\bar{B}\cup\bar{A}))\\
&= (A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) = (A\cup B)\backslash(A\cap B).
\end{aligned}$$

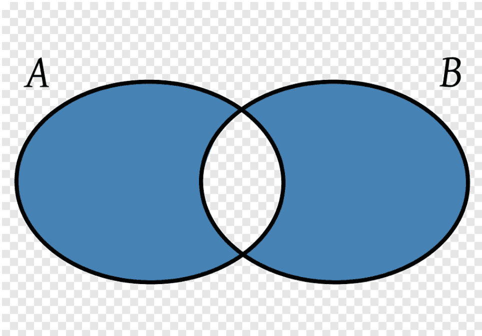

Diagramme de Venn de la différence symétrique.

3. On a, en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
\overline{A\Delta B} &= \overline{(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})}\\
&= (\overline{A\cup B})\cup(\overline{\overline{A\cap B}}) = (\bar{A}\cap\bar{B})\cup(A\cap B)\\
&= (\bar{A}\cup(A\cap B))\cap(\bar{B}\cup(A\cap B))\\
&= (\underbrace{(\bar{A}\cup A)}_{=E}\cap(\bar{A}\cup B))\cap((\bar{B}\cup A)\cap\underbrace{(\bar{B}\cup B)}_{=E})\\
&= (\bar{A}\cup B)\cap(\bar{B}\cup A) = (\bar{A}\cup B)\cap(\overline{\bar{A}\cap B})\\
&= (\bar{A}\cup B)\backslash(\bar{A}\cap B) = \bar{A}\Delta B.
\end{aligned}$$

Et pour la seconde égalité, notons qu'on a toujours $A\Delta B = B\Delta A$ et donc

$$A\Delta\bar{B} = \bar{B}\Delta A \underbrace{=}_{\substack{\text{calcul}\\\text{précédent}}} \overline{B\Delta A} = \overline{A\Delta B}.$$

On en déduit avec ces deux égalités :

$$\bar{A}\Delta\bar{B} = \overline{A\Delta\bar{B}} = A\Delta\bar{\bar{B}} = A\Delta B.$$

4. **Associativité de Δ.**

   (a) En utilisant la définition de Δ puis la question 3., on obtient :

   $$(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B)\cap\bar{C})\cup(\overline{A\Delta B}\cap C) = (((A\Delta B)\cap\bar{C})\cup((\bar{A}\Delta B)\cap C).$$

   (b) Reprenons l'expression de la question précédente, et utilisons la définition de Δ puis la distributivité de l'intersection sur l'union :

   $$\begin{aligned}(A\Delta B)\Delta C &= (((A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B))\cap\bar{C})\cup(((\bar{A}\cap\bar{B})\cup(A\cap B))\cap C)\\ &= (A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

   (c) Remarquons que $A\Delta(B\Delta C) = (B\Delta C)\Delta A = (C\Delta B)\Delta A$. Et donc en reprenant le calcul précédent, et échangeant les rôles joués par A et C, il vient :

   $$\begin{aligned}A\Delta(B\Delta C) &= (C\Delta B)\Delta A\\ &= (C\cap\bar{B}\cap\bar{A})\cup(\bar{C}\cap B\cap\bar{A})\cup(\bar{C}\cap\bar{B}\cap A)\cup(C\cap B\cap A)\\ &= (A\Delta B)\Delta C\end{aligned}$$

5. En utilisant la commutativité et l'associativité de Δ ainsi que les calculs effectués à la question 1., on obtient :

   $$A\Delta B\Delta A = A\Delta(B\Delta A) = A\Delta(A\Delta B) = (A\Delta A)\Delta B = \emptyset\Delta B = B.$$

6. (a) La question précédente prouve que pour tout $C\in\mathscr{P}(E)$:

   $$A\Delta(C\Delta A) = C \iff f_A(C\Delta A) = C.$$

   Donc pour $C\in\mathscr{P}(E)$ fixé, C possède bien un antécédent B par f_A, à savoir $C\Delta A = A\Delta C$.

   (b) Soient B et C deux parties de E telles que $f_A(B) = f_A(C)$, ce qui se récrit $A\Delta B = A\Delta C$.

   Alors $A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C)$, soit encore $A\Delta B\Delta A = A\Delta C\Delta A$ (par commutativité et associativité de Δ). Et donc par la question 5., $B = C$.

   Remarque. La question 6.(a) montre que tout élément de $\mathscr{P}(E)$ admet au moins un antécédent par f_A, la question 6.(b) montre qu'elle admet au plus un antécédent par f_A. Ainsi, tout élément de $\mathscr{P}(E)$ admet exactement un antécédent par f_A : on dit dans ce cas que f_A est bijective.

   (c) Nous savons que $B = \emptyset$ est une solution puisque $f_A(\emptyset) = A\Delta\emptyset = A$.

   Mais la question 6.(b) nous dit qu'une solution, si elle est existe est unique. En effet, si B est une solution, alors $f_A(B) = A = f_A(\emptyset)$, et donc $B = \emptyset$.

   Et donc l'unique solution de $A\Delta B = A$ est $B = \emptyset$.

   Remarque. En d'autres termes, puisque f_A est bijective, A admet un unique antécédent par f_A, qui est $\emptyset$ comme on a pu le constater à la question 1.

7. Il est évident que si $A = B = \emptyset$, alors $A\cap B = \emptyset$ et $A\Delta B = \emptyset$, donc $A\Delta B = A\cap B$.

Inversement, supposons que A et B soient deux parties de E telles que $A\Delta B = A\cap B$. Par la question 2. :

$$\begin{aligned}(A\Delta B)\cap(A\cap B) &= ((A\cup B)\setminus(A\cap B))\cap(A\cap B) = ((A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)})\cap(A\cap B)\\ &= (A\cup B)\cap\underbrace{\overline{(A\cap B)}\cap(A\cap B)}_{=\emptyset} = \emptyset.\end{aligned}$$

Mais puisque $A\Delta B = A\cap B$, il suit :

$$\emptyset = (A\Delta B)\cap(A\cap B) = A\Delta B = A\cap B.$$

Or :

$$\begin{aligned}(A\Delta B)\cup(A\cap B) &= \underbrace{((A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}))}_{=A\cup B}\cup(A\cap B)\\ &= ((A\cup B)\cup(A\cap B))\cap\underbrace{(\overline{A\cap B}\cup(A\cap B))}_{=E} = A\cup B.\end{aligned}$$

Donc $A\cup B = (A\Delta B)\cup(A\cap B) = \emptyset$, et donc $A=\emptyset$ puisque $A\subset A\cup B=\emptyset$, et de même $B=\emptyset$.

Autre méthode. On pouvait également procéder par l'absurde, en supposant que $A\neq\emptyset$. Dans ce cas, il existe $x\in A$.

- Si $x\in B$, alors $x\in A\cap B$, et donc $x\in A\Delta B$. Mais ceci est absurde puisque $x\in A$ et $x\in B$, donc x n'est ni dans $A\backslash B$ ni dans $B\backslash A$, donc pas dans leur union $A\Delta B$.
- Si $x\notin B$, alors $x\notin A\cap B$. Mais $x\in A$ et $x\notin B$, de sorte que $x\in A\Delta B = A\cap B$. Là encore, c'est absurde, et on en déduit donc que A est vide.

Et le même raisonnement prouverait que B est également vide.