DM1

Devoir maison à rendre le 18/09/2024

Soit E un ensemble. Pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on appelle *différence symétrique de A et B*, et on note $A \triangle B$ la partie de E définie par $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$.
Notons qu'on a toujours $A \triangle B = B \triangle A$.

1. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, déterminer les ensembles : $A \Delta E$, $A \triangle A$, $A \Delta \emptyset$ et $A \triangle \bar{A}$.

2. Montrer que pour $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

3. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\overline{A \Delta B} = \bar{A} \Delta B = A \Delta \bar{B}$. Que dire de $\bar{A} \Delta \bar{B}$?

4. **Associativité de $\triangle$.** Soient A, B, C trois parties de E.
   (a) Justifier que $(A \triangle B) \Delta C = ((A \Delta B) \cap \bar{C}) \cup ((\bar{A} \Delta B) \cap C)$.
   (b) En déduire que $(A \Delta B) \Delta C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$.
   (c) Sans nouveaux calculs, justifier alors que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

   On dit alors que la différence symétrique est associative, et on note alors $A \triangle B \triangle C$ (sans parenthèses) l'ensemble $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

5. En effectuant le moins de calculs possibles, déterminer $A \triangle B \triangle A$, où A et B sont deux parties de E.

6. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On note alors f_A l'application $f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & A \Delta B \end{array}$.
   (a) La proposition « $\forall C \in \mathscr{P}(E), \exists B \in \mathscr{P}(E), f_A(B) = C$ » est-elle vraie ? Justifier votre affirmation.
   On pourra notamment utiliser le résultat de la question 5.
   (b) Montrer que f_A est injective, c'est-à-dire que :
   $$\forall (B,C) \in \mathscr{P}(E)^2,\ f_A(B) = f_A(C) \Rightarrow B = C.$$
   (c) Résoudre l'équation $A \triangle B = A$, d'inconnue $B \in \mathscr{P}(E)$.

7. Prouver que pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on a : $(A \triangle B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$.