DM13

Devoir maison à rendre le 20/05/2025

Exercice 1 (Démonstration de la formule de Stirling)

1. Rappelons le développement limité usuel:

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Par produit, il vient alors :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{2}\right)\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) + o(x^3)\\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

soit finalement :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).$$

Ce qui donne :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{12}x^3.$$

2. Par définition :

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+3/2}}{(n+1)!e^{n+1}}.$$

Et comme $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}} \times \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{e^n}{e^{n+1}}\\ &= \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{e} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{e} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

3. Par définition, $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Des résultats précédents, on déduit donc que :

$$v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, l'équivalent $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{12}x^3$ donne $f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^3}$.

Et comme $v_n = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, on obtient donc :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

La série $\sum \frac{1}{12n^2}$ est positive convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2$), et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. D'après le théorème de comparaison, $\sum v_n$ converge.

4. La série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge, donc la suite de terme général $\ln(u_n)$ converge. Notons ℓ sa limite.

Par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^\ell \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} = e^\ell$. Ainsi, $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ell}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, qui est l'équivalent souhaité, avec $\lambda = e^{-\ell} \in \mathbb{R}_+^*$.

5. De l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, on tire, d'une part :

$$(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n} = \lambda 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}.$$

D'autre part, en multipliant par 2^n et en élevant au carré :

$$(2^n n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda^2 2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}.$$

Il vient alors :

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{\lambda^2 2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{n}}$$

soit enfin, en utilisant l'équivalent complet donné:

$$\frac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Ainsi, le quotient de ces deux expressions tend vers 1. Et c'est en fait une constante, car les n se simplifient :

$$\frac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}} \div \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}} \times \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda}$$

ce qui donne finalement $\lambda = \sqrt{2\pi}$. Ceci permet de réécrire la formule :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 2 (Séries de Bertrand)

1. Supposons $\alpha < 1$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Alors :

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}} = \frac{n^\alpha \ln^\beta(n)}{n} = \frac{\ln^\beta(n)}{n^{1-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées $(1-\alpha > 0)$. Ce qui se récrit :

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right).$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente et les deux séries sont à termes positifs, donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est également divergente.

On suppose à présent $\alpha > 1$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors :

$$\frac{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}}{\frac{1}{n^\gamma}} = \frac{n^\gamma}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}\ln^\beta(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées $(\alpha - \gamma > 0)$. D'où :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ est convergente (série de Riemann avec $\gamma > 1$) donc, puisque par ailleurs toutes ces séries sont à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est également convergente.

2. On va traiter différents cas selon la valeur de β.

Supposons $\beta > 1$. Effectuons une comparaison série-intégrale à l'aide de la fonction $f : t \in]1,+\infty[\mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^\beta}$, clairement continue, positive et décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Alors :

$$\forall\, t \in [n-1,n], \quad f(n) \leq f(t)$$

et par croissance de l'intégrale,

$$\int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

soit encore

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$. En sommant l'inégalité précédente pour $n \in [\![3,N]\!]$, on obtient :

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) \leq \sum_{n=3}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui se récrit par relation de Chasles sur les intégrales :

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) \leq \int_{2}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{2}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{2}^{N} \frac{1}{t}\ln^{-\beta}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\ln^{-\beta+1}(t)}{-\beta+1}\right]_2^N \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(N)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)}\right)\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) \leq \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)}.$$

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$ est croissante et majorée.

On en conclut que, pour $\beta > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$ est convergente.

Supposons à présent $\beta = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Comme précédemment, la décroissance de f donne l'inégalité

$$\forall\, t \in [n,n+1], \quad f(t) \leq f(n),$$

S'en suit par croissance de l'intégrale :

$$\int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n}^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t$$

soit encore

$$\int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n).$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Sommons cette inégalité pour $n \in [\![2,N]\!]$:

$$\sum_{n=2}^{N} \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{N} f(n)$$

ce qui donne

$$\int_2^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{N} f(n).$$

Or,

$$\int_2^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{N+1} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_2^{N+1} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2))$$

d'où

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{n=2}^{N} f(n).$$

Puisque $\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la suite des sommes partielles est divergente. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ est bien divergente.

Passons maintenant au cas où $\beta < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors :

$$\frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}.$$

Or, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$ est aussi divergente.

3. Nous disposons des implications suivantes :

$$\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)} \text{converge}$$

et :

$$\alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta \leq 1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)} \text{diverge.}$$

Finalement, nous avons montré l'équivalence :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$
