DM13

Devoir maison à rendre le 20/05/2025

Exercice 1 (Démonstration de la formule de Stirling)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

1. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 3, déterminer un équivalent simple en 0 de la fonction définie par :
$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x) - x.$$
2. Simplifier l'expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
3. Déterminer un équivalent simple de v_n. Que peut-on en déduire ?
4. Démontrer qu'il existe un réel strictement positif λ tel que :
$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$
5. On rappelle l'équivalent suivant, établi dans le DM portant sur les intégrales de Wallis :
$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$
En déduire la valeur de λ.

Exercice 2 (Séries de Bertrand)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse à la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$, qu'on appelle une *série de Bertrand*.

1. Montrer que la série diverge si $\alpha < 1$, et converge si $\alpha > 1$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ grâce à une comparaison série-intégrale.
3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.
