DM14

Devoir maison à rendre le 26/05/2026

I - Fonction génératrice d'une variable aléatoire finie

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On appelle *fonction génératrice de* X la fonction polynômiale G_X définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ ($p \in]0, 1[$) puis $X \sim \mathscr{U}([\![0, n]\!])$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = E(t^X)$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$.
4. Montrer que la donnée de la fonction génératrice G de X caractérise la loi de X.

II - Une application

On effectue une succession de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.

Pour $n \geq 2$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issue de n lancers.

5. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_2 et de X_3.
6. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.
7. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que :
$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k - 1).$$
8. On note G_n la fonction génératrice de la variable X_n.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{n+1}(t) = \dfrac{(1+t)}{2} G_n(t)$.
   (b) En déduire une expression de $G_n(t)$ en fonction de n et de s.
   (c) Calculer alors l'espérance et la variance de X_n.

DM14

Devoir maison à rendre le 26/05/2026

I - Fonction génératrice d'une variable aléatoire finie

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On appelle *fonction génératrice de* X la fonction polynômiale G_X définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ ($p \in]0, 1[$) puis $X \sim \mathscr{U}([\![0, n]\!])$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = E(t^X)$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \Big(G'_X(1)\Big)^2$.
4. Montrer que la donnée de la fonction génératrice G de X caractérise la loi de X.

II - Une application

On effectue une succession de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.

Pour $n \geq 2$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issue de n lancers.

5. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_2 et de X_3.
6. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.
7. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k - 1).$$

8. On note G_n la fonction génératrice de la variable X_n.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{n+1}(t) = \dfrac{(1+t)}{2} G_n(t)$.
   (b) En déduire une expression de $G_n(t)$ en fonction de n et de t.
   (c) Calculer alors l'espérance et la variance de X_n.