DM2

Correction du devoir maison

Partie I. Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} (x_iy_j - x_jy_i)^2 &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(x_i^2y_j^2 - 2x_ix_jy_iy_i + x_i^2y_j^2\right) \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i^2y_j^2 - 2\sum_{1\leq i,j\leq n} x_ix_jy_iy_j + \sum_{1\leq i,j\leq n} x_j^2y_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2y_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_ix_jy_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2y_j^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) - 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_jy_j\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - 2\left(\sum_{j=1}^{n} x_jy_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \\
&\boxed{= 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right)^2.}
\end{aligned}$$

Remarque. On pouvait aller plus vite en se souvenant qu'il a été dit en cours que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$.

(b) Puisqu'il est clair que $\sum_{1\leq i,j\leq n} (x_iy_j - x_jy_i)^2 \geq 0$, car somme de termes positifs, on a donc

$$2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right)^2 \geq 0$$

soit encore

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

Et donc par croissance de la fonction racine,

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_{k^*}^2}.}$$

Partie II. Inégalité de Hardy

2. (a) Calculons, pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
S_k = \sum_{p=1}^{k} p(p+1) &= \sum_{p=1}^{k} p^2 + \sum_{p=1}^{k} p \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{6}(2k+1+3) \\
&\boxed{= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.}
\end{aligned}$$

(b) Calculons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \boxed{= 1 - \frac{1}{n+1}.}$$

(c) Grâce aux calculs précédents, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{S_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(k+1)(k+2)} = 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Mais comme précédemment, on a $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$, et donc on a de nouveau affaire à une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

Donc il s'agit de prouver que

$$3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \leq 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

soit encore que

$$\frac{3}{2}\frac{n}{n+2} \leq \frac{2n}{n+1} \Leftrightarrow 3(n+1) \leq 4(n+2)$$

ce qui est évidemment vrai.

Donc on a bien $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.}$

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec pour tout $p \in [\![1, k]\!]$, $x_p = \sqrt{a_p}$ et $y_p = \frac{p}{\sqrt{a_p}}$. On obtient :

$$\left|\sum_{p=1}^{k} x_p y_p\right| \leq \sqrt{\sum_{p=1}^{k} x_p^2}\sqrt{\sum_{p=1}^{k} y_p^2} \Leftrightarrow \left|\sum_{p=1}^{k} p\right| \leq \sqrt{\sum_{p=1}^{k} a_p}\sqrt{\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}}$$

Puisque tous les termes sont positifs, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\left(\sum_{p=1}^{k} p\right)^2 \leq \left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right)\left(\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right)$$

Et donc en notant que $\sum_{p=1}^{k} p = \frac{k(k+1)}{2}$, on a bien l'inégalité annoncée.

4. L'inégalité que nous venons de prouver s'écrit encore $k\dfrac{k(k+1)^2}{4} \leq S_k\left(\sum_{p=1}^k \frac{p^2}{a_p}\right)$. Et donc

$$\boxed{\frac{k}{S_k} \leq \frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{p=1}^k \frac{p^2}{a_p}.}$$

5. Sommons les inégalités précédemment obtenues pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} \leq 4\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)^2}\sum_{p=1}^k \frac{p^2}{a_p}$$

Soit encore $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} \leq 4\sum_{k=1}^n\sum_{p=1}^k \frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p}$.

Mais on peut alors intervertir les sommes :

$$\sum_{k=1}^n\sum_{p=1}^k \frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p} = \sum_{1\leq p\leq k\leq n}\frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p} = \sum_{p=1}^n\sum_{k=p}^n \frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p} = \sum_{p=1}^n \frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$$

Et donc on a bien l'inégalité demandée.

6. Notons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \geq \frac{2k}{k^2(k+1)^2} \geq \frac{2}{k(k+1)^2}$$

7. Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^n \frac{1}{k(k+1)^2} &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=p}^n\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &\leq \frac{1}{2p^2}\end{aligned}$$

Et donc il vient

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leq 4\sum_{p=1}^n \frac{p^2}{a_p}\frac{1}{2p^2} \leq 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

Ce qui achève donc la preuve de l'inégalité de Hardy.

En aucun cas il ne peut y avoir égalité, puisque l'inégalité $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \leq \frac{1}{2p^2}$ est toujours stricte.

Partie III. Optimalité asymptotique de la constante dans l'inégalité de Hardy

8. (a) On a

$$e^{H_n} = e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}}$$

Mais on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$, et donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $e^{\frac{1}{k}} \geq 1+\frac{1}{k}$. Par produit d'inégalités à termes positifs, il vient donc

$$\boxed{e^{H_n} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}} \geq \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right).}$$

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1}.$$

Et puisque $n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $e^{H_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par composition avec le logarithme, on en déduit que $H_n = \ln\left(e^{H_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

9. L'inégalité de Hardy, appliquée avec $a_k = k$ nous dit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+\cdots+k} \leq \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

soit encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k(k+1)} \leq \lambda H_n$.

Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 2\left(H_n - 1 + \frac{1}{n+1}\right)$. Donc $2H_n - 2 + \frac{2}{n+1} \leq \lambda H_n$. On en déduit, après division par $H_n > 0$, que

$$2 - \frac{2}{H_n} + \frac{2}{(n+1)H_n} \leq \lambda.$$

Puisque $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\frac{2}{H_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{2}{(n+1)H_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente, $\boxed{2 \leq \lambda.}$

Autrement dit, la constante 2 obtenue précédemment dans l'inégalité de Hardy est optimale: on ne peut pas faire mieux.