DM2

Devoir maison à rendre le 04/10/2024

Partie I. Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Dans cette question, on considère $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels.

   (a) Prouver que : $$\sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = 2\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2.$$

   (b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

Partie II. Inégalité de Hardy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \sum_{p=1}^k a_p$.

Le but de cette partie est de prouver l'inégalité de Hardy : $\sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$, soit encore que :
$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

2. Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = k(k+1)$.

   (a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer S_k.

   (b) En notant que pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$.

   (c) Prouver alors que $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$.

3. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$$\left(\sum_{p=1}^k a_p\right)\left(\sum_{p=1}^k \frac{p^2}{a_p}\right) \geq \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

4. En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{k}{S_k} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^k \frac{p^2}{a_p}$.

5. Prouver alors que $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leq 4 \sum_{p=1}^n \frac{p^2}{a_p} \left(\sum_{k=p}^n \frac{1}{k(k+1)^2}\right)$.

6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\frac{2}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$.

7. En déduire l'inégalité de Hardy. Dans quel cas est-ce une égalité ?

Partie III. Optimalité asymptotique de la constante dans l'inégalité de Hardy

On souhaite prouver que la constante 2 du membre de droite de l'inégalité de Hardy est optimale. Dans la suite, on considère $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} \leq \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{H_n} \geq \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

   (b) En déduire que $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

9. En utilisant la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = k$, prouver que $\lambda \geq 2$.
