DM5

Devoir maison à rendre le 25/11/2024

On appelle intégrale de Gauss la limite $I = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, qu'on notera encore $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Le but de ce problème est de justifier l'existence et de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss.

I. Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer W_0 et W_1.
3. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
5. À l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$.
6. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer la valeur de cette constante.
7. En utilisant la monotonie de la suite (W_n), prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$
8. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$, puis la valeur de $\lim_{n\to+\infty} = \sqrt{n}W_n$.
9. Montrer que pour tout $p \geq 0$:
$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}.$$

II. Intégrale de Gauss

Dans cette partie, on note $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ qui s'annule en 0.

10. (a) Montrer que F est croissante.
    (b) Pour $t \in [1, +\infty[$, montrer que $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.
    En déduire que F est majorée, puis que F admet une limite en $+\infty$.

Dans toute la suite, on notera $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *cette limite.*

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

    (a) En utilisant une inégalité classique, montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.

    (b) À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$, montrer que :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

    (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad e^{-t^2} \leq \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

    (b) À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$, montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n} \int_0^B \cos^{2p}(u) \,\mathrm{d}u$$

    où $B \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $p \in \mathbb{N}$ sont à déterminer.

    (c) Montrer que $\displaystyle\int_0^B \cos^{2p}(u) \,\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) \,\mathrm{d}t$.

    (d) Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

13. Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.
