DS1

Correction du devoir surveillé

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$2e^x - 7 = 4e^{-x} \Leftrightarrow 2e^{2x} - 7e^x = 4 \Leftrightarrow 2\left(e^x\right)^2 - 7e^x - 4 = 0.$$

Posons alors $X = e^x$, si bien que x est solution si, et seulement si, $2X^2 - 7X - 4 = 0$. Or cette dernière équation d'inconnue X possède deux solutions, qui sont

$$X_1 = \frac{7 + \sqrt{81}}{4} = 4 > 0 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{7 - \sqrt{81}}{4} < 0$$

Et donc x est solution de l'équation de départ si, et seulement si, $e^x = X_1$ ou $e^x = X_2$. Or $e^x = X_1 \Leftrightarrow x = \ln(4)$ et $e^x = X_2$ n'a pas de solution.

Donc $\boxed{\text{l'équation possède une unique solution qui est } \ln(4).}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $|x+1| \geq 0$, et donc $|x+1| + 2 \geq 0$, de sorte que $||x+1|+2| = |x+1|+2$. Et donc $|||x+1|+2|-3| = ||x+1|-1|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |||x+1|+2|-3| = 2 &\Leftrightarrow |\,|x+1|-1\,| = 2 \\ &\Leftrightarrow |x+1|-1 = 2 \text{ ou } |x+1|-1 = -2 \\ &\Leftrightarrow |x+1| = 3 \text{ ou } |x+1| = -1 \end{aligned}$$

Il est évident que $|x+1| = -1$ n'a pas de solution, et

$$|x+1| = 3 \Leftrightarrow (x+1 = 3 \text{ ou } x+1 = -3) \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -4)$$

Donc $\boxed{\text{l'équation possède deux solutions qui sont } 2 \text{ et } -4.}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons 3 cas :

- Si $x \geq 0$: alors $|x+1| = x+1$ et $|x| = x$. Et donc

$$4|x+1|x - |x| > 1 \Leftrightarrow 4(x+1)x - x > 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 1 > 0.$$

Ce polynôme possède deux racines qui sont $\frac{1}{4}$ et -1, si bien que pour $x \geq 0$,

$$4(x+1)x - x > 1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[\Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

- Si $-1 \leq x < 0$. Alors $|x+1| = x+1$ et $|x| = -x$. Et donc :

$$4|x+1|x - |x| > 1 \Leftrightarrow 4(x+1)x + x > 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 5x - 1 > 0.$$

Ce polynôme possède alors deux racines $x_1 = \frac{-5-\sqrt{41}}{8} < -1$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{41}}{8} > 0$. Et donc pour tout $x \in [-1, 0[$, $4x^2 + 5x - 1 < 0$.

- Si $x < -1$. Alors $|x+1| = -x-1$, et $|x| = -x$. Et donc

$$4|x+1|x - |x| > 1 \Leftrightarrow -4x(x+1) + x > 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x + 1 < 0$$

Or un calcul de discriminant nous informe que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $4t^2 + 3t + 1 > 0$.

Au final, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est } \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[.}$

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Procédons par analyse-synthèse.

   - **Analyse.** Supposons que f soit la somme d'une fonction affine g et d'une fonction h telle que $h(1) = h(-1) = 0$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout réel x, $g(x) = ax + b$. Alors $f(1) = g(1) + h(1) = g(1) = a + b$, et $f(-1) = h(-1) = -a + b$. On en déduit facilement que $a = \frac{f(1)-f(-1)}{2}$, et donc $b = f(1) - a = \frac{f(1)+f(-1)}{2}$. Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(1)-f(-1)}{2}x + \frac{f(1)+f(-1)}{2}$. Et par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(1) - f(-1)}{2}x - \frac{f(1) + f(-1)}{2}.$$
   Donc si de telles fonctions g et h existent, alors elles sont uniques. ·
   - **Synthèse.** Posons $g : x \mapsto \frac{f(1)-f(-1)}{2}x + \frac{f(1)+f(-1)}{2}$ et $h : x \mapsto f(x) - g(x)$.
   Alors il est évidemment que g est affine, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$. Enfin, $h(1) = f(1) - g(1) = f(1) - \frac{f(1)-f(-1)}{2} - \frac{f(1)+f(-1)}{2} = 0$ et de même :
   $$h(-1) = f(-1) - g(-1) = f(-1) + \frac{f(1) - f(-1)}{2} - \frac{f(1) + f(-1)}{2} = 0$$
   Et donc il existe bien au moins une manière d'écrire f comme somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en -1 et en -1 .

   Ainsi, toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en -1 et en 1.

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, il suit :
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$
Par substitution, on obtient $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$ et $3x - 1 < \lfloor 3x \rfloor \leq 3x$, et donc $6x - 3 < 3\lfloor 2x \rfloor \leq 6x$ et $-6x \leq -2\lfloor 3x \rfloor < 2 - 6x$.

   Par somme d'inégalités, on en déduit que :
$$-3 < 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor < 2$$
Puisque par ailleurs $3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor$ est un entier, on a donc $\boxed{-2 \leq 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leq 1.}$

2. (a) Il s'agit de montrer l'unicité d'un tel entier, l'existence étant admise dans l'énoncé. Soient pour cela k, k' deux entiers tels que $k - 1 < x \leq k$ et $k' - 1 < x \leq k'$.
   D'une part, $k - 1 < x \leq k'$ si bien que $k - 1 < k'$ et donc $k \leq k'$ (k et k' étant des entiers).
   Et de même $k' - 1 < x \leq k$, si bien que $k' \leq k$.
   On en déduit donc que $k = k'$, et donc $\boxed{\text{qu'il existe un unique tel entier } k.}$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $k = \lceil x \rceil$, de sorte que $k - 1 < x \leq k$. Et donc $-k \leq -x < -k + 1$. Puisque $-k \in \mathbb{Z}$, on a donc $-k = \lfloor -x \rfloor$.
   Et donc $\boxed{\lceil x \rceil = k = -\lfloor -x \rfloor.}$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, considérons $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.
   Alors $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \lceil p \rceil$ et $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = p$. Donc on a bien l'égalité annoncée. Et si n est impair, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Alors
   $$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil p + \frac{1}{2} \right\rceil = p + 1 \text{ et } \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \lfloor p + 1 \rfloor = p + 1$$
   Dans tous les cas, on a $\boxed{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.}$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Si $x \leq n$, alors on a $\lceil x \rceil - 1 < x \leq n$, et donc $\lceil x \rceil - 1 < n$.
Puisque $\lceil x \rceil$ et n sont entiers, on a donc $\lceil x \rceil \leq n$.
Ainsi, $x \leq n \Rightarrow \lceil x \rceil \leq n$.
Et inversement, si $\lceil x \rceil \leq n$, alors $x \leq \lceil x \rceil \leq n$. Et donc $\lceil x \rceil \leq n \Rightarrow x \leq n$.
Par double implication, on a bien prouvé que $\boxed{x \leq n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leq n.}$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$ et soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Notons $q = \lceil \frac{x}{mn} \rceil$, de sorte que $q - 1 < \frac{x}{mn} \leq q$ et donc $nq - n < \frac{x}{m} < nq$.
Il s'agit donc de prouver que $q = \left\lceil \frac{\lceil \frac{x}{m} \rceil}{n} \right\rceil$. Or :

$$q = \left\lceil \frac{\lceil \frac{x}{m} \rceil}{n} \right\rceil \Leftrightarrow q - 1 < \frac{\lceil \frac{x}{m} \rceil}{n} \leq q \Leftrightarrow nq - n < \left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil \leq nq$$

On a déjà $nq - n < \frac{x}{m} \leq \lceil \frac{x}{m} \rceil$. Par ailleurs, nq est un entier avec $nq \geq \frac{x}{m}$, donc par la question précédente, $nq \geq \left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil$.

Et donc on a bien $nq - n < \lceil \frac{x}{m} \rceil \leq nq$, si bien que $\boxed{\left\lceil \frac{\lceil \frac{x}{m} \rceil}{n} \right\rceil = q = \left\lceil \frac{x}{mn} \right\rceil.}$

Exercice 3

1. Il est évident que si $X = Y = \emptyset$, alors $X \cup Y = \emptyset$.
   Inversement, si $X \cup Y = \emptyset$, alors $X \subset X \cup Y = \emptyset$, et donc $X = \emptyset$, et de même $Y = \emptyset$.

2. On a donc : $f(X) = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap X = \emptyset \text{ et } B \setminus X = \emptyset)$.
   Or si $A \cap X = \emptyset$, alors :
   $$X = X \cap E = X \cap (A \cup \bar{A}) = (X \cap A) \cup (X \cap \bar{A}) = X \cap \bar{A} \subseteq \bar{A}.$$
   Et inversement, si $X \subset \bar{A}$, $X \cap A \subset \bar{A} \cap A = \emptyset$. Et donc :
   $$X \cap A = \emptyset \Leftrightarrow X \subset \bar{A}.$$
   Et puisque $B \setminus X = B \cap \bar{X}$, on a pour les mêmes raisons :
   $$B \setminus X = \emptyset \Leftrightarrow B \subset \bar{\bar{X}} = X.$$
   Et donc :
   $$f(X) = \emptyset \Leftrightarrow (X \subset \bar{A} \text{ et } B \subset X) \Leftrightarrow B \subset X \subset \bar{A}.$$

3. Supposons qu'il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = \emptyset$, et fixons un tel X.
   Par la question précédente on a alors $B \subset X \subset \bar{A}$, si bien qu'en particulier $B \subset \bar{A}$. Et alors $(B \cap A) \subset \bar{A} \cap A = \emptyset$, si bien que $B \cap A = \emptyset$.
   Inversement, supposons que $A \cap B = \emptyset$. Alors si on pose $X = B$, il vient
   $$f(X) = f(B) = (A \cap B) \cup (B \setminus B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$
   Par double implication, il existe donc $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = \emptyset$ si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

4. Dans un premier temps, considérons D une partie de $\bar{A}$ et posons $X = B \cup D$. Alors
   $$A \cap X = A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D) = \emptyset \cup (A \cap D) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Et par ailleurs, puisque $B \subset X, B \backslash X = \emptyset$. Plus rigoureusement, $B \backslash X = B \cap \bar{X} = \underbrace{B \cap \bar{B}}_{=\emptyset} \cap \bar{D} = \emptyset$.

Et donc $f(X) = \emptyset$.

Inversement, considérons une partie X de E telle que $f(X) = \emptyset$. D'après la question 2., $B \subset X$. Posons alors $D = X \cap \bar{B}$. On a alors :

$$X = X \cap E = X \cap (B \cup \bar{B}) = \underbrace{(X \cap B)}_{=B} \cup (X \cap \bar{B}) = B \cup D.$$

Et puisque par ailleurs $X \subset \bar{A}$, nécessairement $D \subset X \subset \bar{A}$, si bien que $D \in \mathscr{P}(\bar{A})$. Donc comme annoncé, il existe bien une partie D de $\bar{A}$ telle que $X = B \cup D$.

Exercice 4 (Nombres de Catalan)

1. On a $a_0 = \binom{0}{0} = 1, a_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = 1, a_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = 2, a_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5, a_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = 14$. On en déduit alors que

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} a_0 a_{0-k} = a_0 = 1,\ S_1 = a_0a_1 + a_1a_0 = 2,\ S_2 = a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 5,$$
$$S_3 = a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 = 14.$$

On remarque alors que $S_3 = a_4$, $S_2 = a_3$, $S_1 = a_2$ et $S_0 = a_1$. Autrement dit que pour $k \leq 3$, $S_k = a_{k+1}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \boxed{= a_n}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\binom{2n}{n} \in \mathbb{N}$ et $\binom{2n}{n+1} \in \mathbb{N}$, on a $a_n \in \mathbb{Z}$. Et puisque par ailleurs il est évident que $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \geq 0$, alors $a_n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans la somme définissant T_n, réalisons le changement d'indice $i = n - k$. On a alors

$$T_n = \sum_{i=0}^{n}(n-i)a_{n-i}a_{n-(n-i)} = \sum_{i=0}^{n}(n-i)a_{n-i}a_i = \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_ka_{n-k}$$

Et donc :

$$2T_n = \sum_{k=0}^{n} ka_ka_{n-k} + \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_ka_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} na_ka_{n-k} = n\sum_{k=0}^{n} a_ka_{n-k} = nS_n.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$(n+2)a_{n+1} = (n+2)\frac{1}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\frac{(2n)!}{n!n!}$$
$$= 2(2n+1)\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = 2(2n+1)\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = 2(2n+1)a_n$$

5. Calculons :

$$\begin{aligned}
T_{n+1}+S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} \quad \text{par la quest. 3.}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(n+2-k)a_k a_{n+1-k}\\
&= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(n+2-k)a_k a_{n+1-k} \quad \text{en isolant le terme pour } k=n+1\\
&= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k(n-k+2)a_{n-k+1}\\
&= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k 2(2(n-k)+1)a_{n-k} \quad \text{par la quest. 4.}\\
&= a_{n+1} + 2\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}(2j+1)a_j \quad \text{par changement d'indice } j=n-k\\
&= a_{n+1} + 4\sum_{j=0}^{n} j a_j a_{n-j} + 2\sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j} = a_{n+1}+4T_n+2S_n\\
&= a_{n+1}+2nS_n+S_n \quad \text{par la quest. 3.}\\
&\boxed{= a_{n+1}+2(n+1)S_n}
\end{aligned}$$

En notant alors que par la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = \frac{n+1}{2}S_{n+1}$, on en vient à $\dfrac{n+1}{2}S_{n+1}+S_{n+1} = a_{n+1}+2(n+1)S_n$, et donc $\dfrac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1}+2(n+1)S_n$.

6. Prouvons par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$ que $S_n = a_{n+1}$.

Init. Puisque $S_0 = 1 = a_1$, la récurrence est initialisée.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = a_{n+1}$. Alors $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1}+2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$. Mais par la question 4.,

$$(n+3)a_{n+2} = 2(2(n+1)+1)a_{n+1} = 2(2n+3)a_{n+1} = (n+3)S_{n+1}$$

si bien que $S_{n+1} = a_{n+2}$.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = a_{n+1}$.

7. Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que $a_n \in \mathbb{N}$.

Init. On a évidemment $a_0 = 1 \in \mathbb{N}$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que pour tout $k \in [\![0,n]\!], a_k \in \mathbb{N}$.
Alors pour tout $k \in [\![0,n]\!], n-k \in [\![0,n]\!]$, et donc $a_{n-k} \in \mathbb{N}$, si bien que $a_k a_{n-k} \in \mathbb{N}$.
Et donc $a_{n+1} = S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \in \mathbb{N}$.

Ainsi, par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}$.

Le saviez-vous ?

Les nombres a_n étudiés dans ce problème sont appelés les *nombres de Catalan*, et ils interviennent dans plusieurs problèmes de dénombrement. Par exemple a_n est le nombre de manières de parenthèses correctement un produit de $n+1$ lettres, où l'on n'autorise que deux termes dans chaque produit. Par exemple, les $a_3 = 5$ parenthésages d'un mot de 4 lettres sont

$$(xy)(zt), ((xy)z)t, (x(yz))t, x((yz)t) \text{ et } x(y(zt))$$

Problème (Une équation fonctionnelle)

Partie I. Exemples.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f_1(f_1(x)) = 2 - f_1(x) = 2 - (2 - x) = x$.

   Donc f_1 est bien une involution.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors $f_2(x) = 0$ et donc $f_2(f_2(x)) = f_2(0) = 0 = x$. Si $x \neq 0$, alors $f_2(f_2(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_2(f_2(x)) = x$, si bien que f_2 est une involution.

2. Soient a, b deux réels tels que $f(a) = f(b)$. Alors $f(f(a)) = f(f(b)) \Leftrightarrow a = b$. Et donc ceci prouve bien que si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

3. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$.

   - Si $f(x) > x$, alors par croissance de f, $f(f(x)) \geq f(x) \Leftrightarrow x \geq f(x)$, ce qui contredit $f(x) > x$.
   - Et si $f(x) < x$, alors toujours par croissance de f, on a $f(f(x)) \leq f(x) \Leftrightarrow x \leq f(x)$, ce qui est également absurde.

   Donc $f(x) = x$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie II. Une équation fonctionnelle.

4. Soient x, y deux réels. Alors

$$g\left(g(x)^2 + g(y)\right) = g\left(x^2 + y\right) = x^2 + y = xg(x) + y.$$

   Donc g est bien solution de $(\star)$. De même, on a

$$h\left(h(x)^2 + y\right) = h\left((-x)^2 - y\right) = y - x^2 \quad \text{et} \quad xh(x) + y = -x^2 + y$$

   donc h est bien solution de $(\star)$.

5. Prenons $x = 0$ et $y = 0$. Alors $f\left(f(0)^2 + f(0)\right) = 0$.

   Et donc en posant $x_0 = f(0)^2 + f(0)$, on a bien $f(x_0) = 0$.

6. Soit $t \in \mathbb{R}$. En prenant $x = x_0$ et $y = t$ dans $(\star)$, il vient

$$f\left(f(x_0)^2 + f(t)\right) = x_0 f(x_0) + t \Leftrightarrow f(f(t)) = t$$

   Ceci étant vrai pour tout réel t, f est une involution.

7. (a) Soient x, y deux réels. Alors $f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y$.
   Et donc en appliquant f aux deux membres, et en notant que f est une involution, il vient

$$f(x)^2 + f(y) = f(xf(x) + y).$$

(b) Soient t et y deux réels. Alors en prenant $x = f(t)$ dans la relation de la question précédente, il vient $f(f(t))^2 + f(y) = f(tf(t) + y) \Leftrightarrow t^2 + f(y) = f(f(t)t + y)$.

(c) Soient t et y deux réels. Par la question précédente, $t^2 + f(y) = f(f(t)t + y)$. Mais par la question 7.(a), $f(tf(t) + y) = f(t)^2 + f(y)$. Et donc $t^2 + f(y) = f(t)^2 + f(y)$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $t = x$ et $y = x_0$ dans la question précédente. Il vient alors $x^2 + f(x_0) = f(x)^2 + f(x_0) \Leftrightarrow x^2 = f(x)^2 \Leftrightarrow (f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x)$.

(e) On souhaite prouver que soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (si $f = g$), soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ (si $f = h$). Or ce que nous venons de prouver ne permet pas d'exclure que pour certaines valeurs de x, $f(x) = x$ et que pour d'autres $f(x) = -x$. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ vérifie bien la conclusion de la question 7.(d) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (|x| = x \text{ ou } |x| = -x).$$

Pourtant elle n'est égale ni à g ni à h. Donc nous n'avons pas encore prouvé que $f = g$ ou $f = h$.

8. (a) Dans $(\star)$, prenons $x = a$ et $y = b$.
Il vient alors $f\left(f(a)^2 + f(b)\right) = af(a) + b \Leftrightarrow f\left(a^2 - b\right) = a^2 + b$. Mais par la question 7.(d), soit $f\left(a^2 - b\right) = a^2 - b$, soit $f\left(a^2 - b\right) = b - a^2$.
Dans le premier cas, on a donc $a^2 + b = a^2 - b$, et donc $b = -b \Leftrightarrow b = 0$.
Dans le second cas, on a $a^2 + b = b - a^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
Donc en conclusion, soit $a = 0$, soit $b = 0$.

(b) Rappelons ce que nous souhaitons prouver : c'est que soit pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = -x$.

- Supposons que $f(1) = 1$. Alors par la question précédente, il ne peut exister de $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) = -x$. Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x$.
Et puisque $f(0) = 0$ (d'après la question 7.(d)), on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x$, si bien que $f = g$.
- En revanche, si $f(1) = -1$, alors par la question précédente, il n'existe pas de $a \neq 0$ tel que $f(a) = a$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f(x) = -x$. Puisque $f(0) = -0$, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = -x$, si bien que $f = h$.

Nous venons de prouver que si f est une solution de $(\star)$, alors c'est soit f soit g. Puisque par ailleurs, nous avons déjà prouvé que g et h sont des solutions au problème posée, ce sont les seules solutions de l'équation fonctionnelle $(\star)$.