DS1

# Devoir surveillé du 28/09/2024

Durée : 3h.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.*
*La calculatrice n'est pas autorisée.*

## Exercice 1

*Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Résoudre l'équation $2e^x - 7 = 4e^{-x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $|||x+1|+2|-3| = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'inéquation $4|x+1|x - |x| > 1$.
4. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en $-1$ et en $1$.

---

## Exercice 2

1. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2 \leq 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leq 1$.
2. On admet que pour tout réel $x$, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k - 1 < x \leq k$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k - 1 < x \leq k$.
   Dans la suite, on note $\lceil x \rceil$ cet unique entier, appelé *partie entière supérieure de* $x$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.
   (c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
   (d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\quad x \leq n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leq n$.
   (e) Prouver : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\lceil \dfrac{\left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil}{n} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{x}{mn} \right\rceil$.

---

## Exercice 3

Soit $E$ un ensemble, et soient $A, B$ deux parties de $E$.
Pour $X \in \mathscr{P}(E)$, on note $f(X) = (A \cap X) \cup (B \backslash X)$.

1. Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$. Justifier que : $\quad X \cup Y = \emptyset \Leftrightarrow X = Y = \emptyset$.
2. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $f(X) = \emptyset$ si, et seulement si, $B \subset X \subset \bar{A}$.
3. Prouver alors qu'il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = \emptyset$ si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.
4. On suppose dans cette question que $A \cap B = \emptyset$, et soit $X \in \mathscr{P}(E)$.
   Montrer que $f(X) = \emptyset$ si, et seulement si, il existe $D \in \mathscr{P}(\bar{A})$ tel que $X = B \cup D$.

---

## Problème 1 (Nombres de Catalan)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note successivement :

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}.$$

1. Calculer $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$, ainsi que $S_0, S_1, S_2$ et $S_3$. Que remarquez-vous ?
2. (a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_k a_{n-k}$.

   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2T_n = nS_n$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les questions précédentes, montrer que :

   $$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

   puis que :

   $$\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n.$$
6. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1}$.
7. En utilisant la question précédente, retrouver le résultat de la question 2.(b).

---

## Problème 2 (Une équation fonctionnelle)

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appelée une involution si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$.

### Partie I. Exemples.

1. Montrer que les fonctions suivantes sont des involutions :

   (a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2-x \end{array}$

   (b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une involution. Prouver que pour tous réels $a, b$, si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une involution croissante. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

**Partie II. Une équation fonctionnelle.**

Le but de cette partie est de prouver que les fonctions $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$ sont les seules fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y \qquad (\star)$$

On dit qu'il s'agit des solutions de l'équation fonctionnelle $(\star)$.

4. Montrer que $g$ et $h$ sont bien des solutions de $(\star)$.

Dans toute la suite de cette partie, on fixe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solution de $(\star)$, et on cherche à prouver que $f$ est l'une des deux fonctions de la question précédente.

5. En appliquant $(\star)$ à des réels $x$ et $y$ bien choisis, prouver qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

   *Dans toute la suite, on considère donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.*

6. Prouver que $f$ est une involution.

7. (a) Prouver que pour tous réels $x$ et $y$, on a $f(x)^2 + f(y) = f(xf(x) + y)$.
   (b) En déduire que pour tous réels $t$ et $y$, on a $t^2 + f(y) = f(f(t)t + y)$.
   (c) En déduire que pour tous réels $t$ et $y$, on a $t^2 + f(y) = f(t)^2 + f(y)$.
   (d) Prouver enfin que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.
   (e) Expliquer brièvement pourquoi ceci ne suffit pas encore pour conclure que $f = g$ ou $f = h$.

8. (a) Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(f(a) = a$ **et** $f(b) = -b) \Rightarrow (a = 0$ **ou** $b = 0)$.
   (b) Conclure.

---