

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Marche aléatoire sur \mathbb{Z})

1. Par télescopage, en tenant compte que $S_0 = 0$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable $X_k = S_k - S_{k-1}$ représente le déplacement du mobile entre l'instant $t = k - 1$ et l'instant $t = k$. Les déplacements du mobile entre les différents instants se faisant indépendamment les uns des autres, X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

2. (a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, entre l'instant $t = k - 1$ et l'instant $t = k$, le mobile se déplace d'une unité vers la droite avec une probabilité p ou d'une unité vers la gauche avec une probabilité $q = 1 - p$. Dès lors :

$$X_k(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad P(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_k = -1) = 1 - p.$$

Calculons :

$$E(X_k) = (-1) \times P(X_k = -1) + 1 \times P(X_k = 1) = -(1 - p) + p = 2p - 1.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n (2p - 1) = n(2p - 1).$$

- (b) Par définition, $X'_k = \frac{1 + X_k}{2}$. Ainsi, $X'_k(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$$P(X'_k = 1) = P(X_k = 1) = p.$$

Donc X'_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Le cours nous donne alors $E(X'_k) = p$ et $V(X'_k) = p(1 - p)$.

- (c) Rappelons que si X est une variable aléatoire et $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{et} \quad V(aX + b) = a^2V(X).$$

Ici, $X_k = 2X'_k - 1$, d'où :

$$E(X_k) = 2E(X'_k) - 1 = 2p - 1 \quad \text{et} \quad V(X_k) = 2^2V(X'_k) = 4p(1 - p).$$

- (d) Calculons :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n (2X'_k - 1) = 2 \sum_{k=1}^n X'_k - n = 2U_n - n.$$

Par lemme de coalition, les variables X'_1, \dots, X'_n sont mutuellement indépendantes et suivent toutes une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$. Par stabilité de la loi binomiale par

somme, $U_n = \sum_{k=1}^n X'_k$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

- (e) Puisque U_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, $E(U_n) = np$ et $V(U_n) = np(1 - p)$. Par les propriétés de l'espérance et de la variance rappelées plus haut :

$$\boxed{E(S_n) = 2E(U_n) - n = 2np - n = n(2p - 1) \quad \text{et} \quad V(S_n) = 4V(U_n) = 4np(1 - p).}$$

- (f) La variable S_n est centrée si, et seulement si, $E(S_n) = 0$, soit :

$$n(2p - 1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{1}{2}}.$$

Supposons alors $p = \frac{1}{2}$, et calculons :

$$V\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n}V(S_n) = 4pq = 1.$$

Donc $\boxed{\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ centrée réduite lorsque $p = \frac{1}{2}$.

3. (a) Supposons $m \leq n$, l'autre cas se faisant de manière identique par symétrie de la covariance. Alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^m X_k + \sum_{k=m+1}^n X_k = S_m + D_{m,n}$$

où $D_{m,n} = \sum_{k=m+1}^n X_k$. Par lemme de coalition, S_m et $D_{m,n}$ sont indépendantes, de sorte que $\text{Cov}(S_m, D_{m,n}) = 0$. Par bilinéarité de la covariance :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_m, S_n) &= \text{Cov}(S_m, S_m + D_{m,n}) = \text{Cov}(S_m, S_m) + \text{Cov}(S_m, D_{m,n}) \\ &= V(S_m) = 4mpq = \boxed{4pq \cdot \min(m, n)}. \end{aligned}$$

Le signe de cette covariance est positif. C'était en effet prévisible puisque si S_m augmente, son abscisse à $t = m$ est plus grande, et donc son abscisse à $t = n$ aura tendance à être plus grande également.

- (b) Puisque p et q sont non nuls par hypothèse, $\text{Cov}(S_m, S_n) \neq 0$ dès que m et n sont supérieurs à 1. Dans ce cas, on peut affirmer que S_m et S_n ne sont pas indépendantes.

Supposons $m = 0$ par exemple. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in S_n(\Omega)$:

$$P([S_0 = 0] \cap [S_n = k]) = P(\Omega \cap [S_n = k]) = P(S_n = k) = P(S_0 = 0)P(S_n = k).$$

Dans ce cas, les variables S_0 et S_n sont indépendantes. Par symétrie, ce résultat vaut également si $n = 0$.

Ainsi, $\boxed{S_m \text{ et } S_n \text{ sont indépendantes si, et seulement si, } m = 0 \text{ ou } n = 0.}$

4. (a) On a montré que $S_n = 2U_n - n$ où U_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Ainsi :

$$\boxed{S_n(\Omega) = \{2k - n, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}}.$$

Si n est impair, 0 n'appartient pas à $S_n(\Omega)$, et donc $\boxed{P(S_n = 0) = 0}$ dans ce cas.

- (b) Supposons n pair de la forme $n = 2N$. Alors :

$$P(S_n = 0) = P(U_n = N) = \boxed{\binom{2N}{N} (pq)^N}.$$

(c) Rappelons la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Ici :

$$\binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{(N!)^2} \sim \frac{\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N} \sqrt{4\pi N}}{\left(\frac{N}{e}\right)^{2N} (2\pi N)} = \frac{4^N}{\sqrt{\pi N}}$$

Et donc :

$$P(S_{2N} = 0) = \binom{2N}{N} (pq)^N \sim \frac{(4pq)^N}{\sqrt{\pi N}}.$$

(d) La fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ est polynomiale de degré 2, de coefficient dominant -1 , avec pour racines 0 et 1. Son graphe est donc une parabole « orientée vers le bas » qui atteint son maximum en un unique point, le point d'abscisse le « milieu des racines », soit $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \leq f(1/2) = \frac{1}{4}.$$

Ici :

$$4pq = 4p(1-p) \leq \frac{4}{4} = 1$$

avec égalité si, et seulement si $p = 1/2$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \frac{(4pq)^N}{\sqrt{\pi N}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi N}}$$

qui tend vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$. Par théorème des gendarmes, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(4pq)^N}{\sqrt{\pi N}}$ existe et vaut 0. Et avec la question précédente :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (P(S_{2N} = 0)) = 0.$$

5. (a) Par théorème de transfert :

$$E(t^{U_{2N}}) = \sum_{k=0}^{2N} t^k P(U_{2N} = k) = \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{k} (pt)^k q^{2N-k} = (pt + q)^{2N}.$$

Calculons :

$$P(S_{2N} \leq 0) = P(2U_{2N} - 2N \leq 0) = P(U_{2N} \leq N) = P(t^{U_{2N}} \geq t^N)$$

car $x \mapsto t^x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ lorsque $t \in]0, 1[$. Par l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire **positive** $t^{U_{2N}}$:

$$P(t^{U_{2N}} \geq t^N) \leq \frac{E(t^{U_{2N}})}{t^N} = \frac{(pt + q)^{2N}}{t^N} = \left(\frac{(pt + q)^2}{t}\right)^N = f(t)^N.$$

Notons que cette inégalité est encore valable lorsque $t = 1$, puisqu'alors $f(1) = 1$.

- (b) La fonction f est dérivable sur $]0, 1]$ en tant que composée de telles fonctions, et pour tout $t \in]0, 1]$:

$$f'(t) = p^2 - \frac{q^2}{t^2} = \frac{(pt)^2 - q^2}{t^2} = \frac{(pt + q)(pt - q)}{t^2}.$$

On résout l'inéquation suivante sur $]0, 1]$:

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(pt + q)}_{>0} (pt - q) > 0 \Leftrightarrow t > \frac{q}{p}.$$

On notera que $t_0 = \frac{q}{p}$ est bien strictement positif, et :

$$1 - t_0 = 1 - \frac{q}{p} = \frac{2p - 1}{p} > 0$$

car $p > \frac{1}{2}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]0, t_0[$, strictement croissante sur $]t_0, 1]$, et admet un minimum en $t_0 \in]0, 1[$, égal à :

$$f(t_0) = p^2 \frac{q}{p} + 2pq + \frac{q^2}{q/p} = 4pq$$

qui appartient bien à l'intervalle $[0, 1[$ d'après la question 4.(d), étant donné que $p \neq \frac{1}{2}$.

- (c) Par la question 5.(a) appliquée avec le réel $t_0 \in]0, 1[$:

$$0 \leq P(S_{2N} \leq 0) \leq f(t_0)^N.$$

Puisque $f(t_0)$ appartient à l'intervalle $[0, 1[$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} f(t_0)^N = 0$. Par théorème des gendarmes, $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(S_{2N} \leq 0)$ existe et vaut 0.

Remarquons enfin que :

$$P(S_{2N} \geq 0) = P(S_{2N} = 0) + P(S_{2N} > 0) = P(S_{2N} = 0) + 1 - P(S_{2N} \leq 0).$$

Par la question 4.(d) et ce qui précède, $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(S_{2N} = 0) = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(S_{2N} \leq 0) = 0$.

Par opération sur les limites, $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(S_{2N} \geq 0) = 1$.

6. (a) Calculons :

$$\begin{aligned} P(S_{2N} > 0) &= P(2U_{2N} - 2N > 0) = P(U_{2N} > N) = P(U_{2N} \geq N + 1) \\ &= \sum_{k=N+1}^{2N} P(U_{2N} = k) = \sum_{k=N+1}^{2N} \binom{2N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2N-k} \\ &= \frac{1}{4^N} \sum_{k=N+1}^{2N} \binom{2N}{k}. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} P(S_{2N} < 0) &= P(U_{2N} < N) = P(U_{2N} \leq N - 1) = \frac{1}{4^N} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N}{k} \\ &= \frac{1}{4^N} \sum_{\ell=N+1}^{2N} \binom{2N}{2N - \ell} = \frac{1}{4^N} \sum_{\ell=N+1}^{2N} \binom{2N}{\ell} = P(S_{2N} > 0) \end{aligned}$$

par symétrie des coefficients binomiaux.

- (b) Puisque $\Omega = [S_{2N} < 0] \sqcup [S_{2N} = 0] \sqcup [S_{2N} > 0]$, on obtient par additivité et la question précédente :

$$1 = P(S_{2N} < 0) + P(S_{2N} = 0) + P(S_{2N} > 0) = P(S_{2N} = 0) + 2P(S_{2N} > 0).$$

Ainsi :

$$P(S_{2N} \geq 0) = P(S_{2N} = 0) + P(S_{2N} > 0) = P(S_{2N} = 0) + \frac{1 - P(S_{2N} = 0)}{2}$$

$$\boxed{= \frac{1 + P(S_{2N} = 0)}{2}}.$$

Par la question 4.(d), $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(S_{2N} = 0) = 0$. Et donc par opération sur les limites,

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} (P(S_{2N} \geq 0)) = \frac{1}{2}}.$$

Exercice 2 (Résultant de deux polynômes - Inspiré de CCINP 2009 MP)

Partie I - Premiers calculs

1. (a) La matrice $M_{P,Q}$ est carrée de taille $p + q = 2$ ici. Elle vaut $M_{P,Q} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$.

(b) Calculons :

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \boxed{= a_0 b_1 - a_1 b_0}.$$

Si $\text{Res}(P, Q) = 0$, la matrice $M_{P,Q}$ est de rang 1 car non nulle (a_1 et b_1 sont non nuls) et non inversible. Puisqu'ici, $M_{P,Q}$ n'est autre que la matrice de la famille (P, Q) dans la base canonique, $\text{rg}(P, Q) = \text{rg}(M_{P,Q}) = 1$ et P et Q sont colinéaires. En particulier, P et Q possède une racine commune, à savoir $-\frac{a_0}{a_1} = -\frac{b_0}{b_1}$.

2. Partons du déterminant $\text{Res}(P, Q)$ à $q + p$ colonnes C_1, \dots, C_q associées au polynôme P et D_{q+1}, \dots, D_{q+p} associées au polynôme Q . En effectuant successivement les opérations élémentaires $C_i \leftrightarrow C_{i+1}$ pour $i = q, q-1, \dots, 1$, on obtient (en tenant compte des multiplications par (-1) liées à ces opérations) :

$$\text{Res}(P, Q) = (-1)^q \det_{\mathcal{C}}(D_{q+1}, C_1, \dots, C_q, D_{q+2}, \dots, D_{q+p})$$

où \mathcal{C} désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{p+q,1}(\mathbb{C})$. En effectuant des opérations similaires pour ramener la colonne D_{q+2} en deuxième colonne, on obtient :

$$\text{Res}(P, Q) = (-1)^{2q} \det_{\mathcal{C}}(D_{q+1}, D_{q+2}, C_1, \dots, C_q, D_{q+3}, \dots, D_{q+p}).$$

En poursuivant successivement pour les colonnes $q+3$ jusqu'à $q+p$, on obtient :

$$\text{Res}(P, Q) = (-1)^{pq} \det_{\mathcal{C}}(D_{q+1}, \dots, D_{q+p}, C_1, \dots, C_q) \boxed{= (-1)^{pq} \text{Res}(Q, P)}.$$

Partie II - Critère de primalité relative

3. (a) Soient $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculons :

$$u(\lambda(A_1, B_1) + (A_2, B_2)) = u(\lambda A_1 + A_2, \lambda B_1 + B_2) = P \times (\lambda A_1 + A_2) + Q \times (\lambda B_1 + B_2)$$

$$= \lambda(PA_1 + QB_1) + (PA_2 + B_2) = \lambda u((A_1, B_1)) + u((A_2, B_2)).$$

Donc u est une application linéaire.

- (b) Puisque u est bijective, elle est en particulier surjective. Ainsi $\text{Im}(u) = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ et 1 appartient à $\text{Im}(u)$.

Puisque 1 est dans l'image de u , il existe $(A, B) \in E$ un couple de polynômes tel que :

$$PA + QB = u((A, B)) = 1.$$

On reconnaît ici une identité de Bezout : P et Q sont premiers entre eux.

- (c) Supposons P et Q premiers entre eux. Soit $(A, B) \in E$. Si (A, B) appartient au noyau de u alors :

$$PA + QB = 0, \quad \text{soit encore} \quad PA = (-B)Q.$$

Donc Q divise le produit PA et est premier avec P . Par le lemme de Gauss, Q divise donc $A \in \mathbb{C}_{q-1}[X]$. Puisque $\deg(Q) > \deg(A)$, A est le polynôme nul. On montre de même que $B = 0_{\mathbb{C}_{p-1}[X]}$.

Ainsi, $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ et u est injective. Comme de plus :

$$\dim(E) = \dim(\mathbb{C}_{q-1}[X]) + \dim(\mathbb{C}_{p-1}[X]) = q + p = \dim(\mathbb{C}_{p+q-1}[X]),$$

u est bien bijective.

4. (a) Pour tout $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$ et pour tout $\ell \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$:

$$u((X^k, 0)) = P \times X^k + Q \times 0 = \sum_{i=0}^p a_i X^{k+i}$$

et

$$u((0, X^\ell)) = P \times 0 + Q \times X^\ell = \sum_{i=0}^q b_i X^{\ell+i}.$$

Ainsi :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & \vdots \\ & & a_p & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & b_q \end{pmatrix} = M_{P,Q}.$$

- (b) Par le cours, $\text{Res}(P, Q) \neq 0$ si, et seulement si, $M_{P,Q} = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$ est inversible, ce qui équivaut à u bijective. Et avec la question 3, ceci est réalisé si, et seulement si, P et Q sont premiers entre eux. Ainsi :

$$\text{Res}(P, Q) \neq 0 \Leftrightarrow P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux.}$$

Partie III - Discriminant

5. Nous avons vu en cours que P est à racines simples dans \mathbb{C} si, et seulement si, P est premier avec P' . Et ce dernier point équivaut à $\text{Res}(P, P') \neq 0$ par la question 4.(b). D'où l'équivalence voulue :

$$P \text{ est à racines simples} \Leftrightarrow \Delta(P) \neq 0.$$

6. On suppose dans cette question $p = 2$ et $P = aX^2 + bX + c$. Alors $P' = 2aX + b$ et :

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= -\frac{1}{a} \operatorname{Res}(P, P') = -\frac{1}{a} \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & 2a & b \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = -\frac{1}{a} \left(c \begin{vmatrix} 2a & b \\ 0 & 2a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & b \\ a & 2a \end{vmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{a} (4ca^2 - ab^2) \quad \boxed{= b^2 - 4ac.}\end{aligned}$$

Avec la question précédente, on retrouve qu'un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ est à racines simples si, et seulement si, son discriminant $b^2 - 4ac$ est non nul. Mais l'outil introduit dans cet exercice est beaucoup moins restrictif, puisqu'il vaut pour tout polynôme de degré supérieur à 2.

7. Calculons pour cela le discriminant de $P = X^3 + aX + b$. Avec les notations introduites plus haut, $p = 3$, $P' = 3X^2 + a$ et :

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_5}}{=} - \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & a \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 \\ 0 & 3 & 0 & a \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & 3 & 0 & a \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -b^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2b \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2a \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -27b^2 - 6ab \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} - 2a^2 \begin{vmatrix} 0 & a \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -27b^2 - 4a^3.\end{aligned}$$

Par la question 5, le polynôme $X^3 + aX + b$ admet une racine multiple si, et seulement si, $27b^2 + 4a^3 = 0$.

Partie IV - Nombres algébriques

8. Soient x et y deux nombres algébriques, P et Q des polynômes non nuls à coefficients rationnels qui les annulent. Posons $z = x + y$.

(a) On remarque x est racine de P et de $Q(z - X)$ puisque $R(x) = Q(z - x) = Q(y) = 0$. Ainsi, $(X - x)$ divise P et $Q(z - X)$, qui ne sont donc pas premiers entre eux.

(b) Puisque P et $Q(z - X)$ ne sont pas premiers entre eux :

$$\operatorname{Res}(P(X), Q(z - X)) = 0.$$

Mais d'après les règles de calcul du déterminant (donc du résultant), la quantité du membre de gauche définit un polynôme en z à coefficients rationnels. Ainsi, $\boxed{z \text{ est algébrique.}}$

9. Soient x et y deux nombres algébriques qu'on supposera non nul (sinon il est clair que $x \times y = 0$ est algébrique). Notons comme précédemment P et Q des polynômes non nuls à coefficients rationnels qui les annulent. En reprenant la même idée que précédemment, considérons $z = x \times y$ et $R = X^q Q\left(\frac{z}{X}\right)$ où $q = \deg(Q)$. Alors R est bien un polynôme à coefficients dans \mathbb{C} et satisfait $R(x) = x^q Q(y) = 0$. Les polynômes P et R ont donc une racine commune, de sorte que :

$$\operatorname{Res}(P, R) = 0.$$

Or, par le même argument que précédemment, la quantité du membre de gauche définit un polynôme en z à coefficients rationnels. Ainsi, $\boxed{z \text{ est algébrique.}}$

10. Montrons que l'ensemble \mathcal{A} des nombres algébriques est un sous-anneau de \mathbb{C} :

- \mathcal{A} contient bien 1 (et même tous les rationnels) ;
- \mathcal{A} est stable par somme d'après la question 8 ;
- \mathcal{A} est stable par passage à l'opposé : si $z \in \mathcal{A}$ et si P est non nul à coefficients rationnels tel que $P(z) = 0$, alors $Q = P(-X)$ est également non nul à coefficients rationnels et annule $-z$;
- \mathcal{A} est stable par produit d'après la question 9.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{A} \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{C}.}$

Remarque. On peut en fait montrer que \mathcal{A} est un sous-corps de \mathbb{C} . On le note généralement $\overline{\mathbb{Q}}$, et on l'appelle *la clôture algébrique de \mathbb{Q}* .
