

Devoir surveillé du 11/10/2025

Durée : 3h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes d'équations linéaires suivants en discutant selon la valeur du paramètre m :

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2t = m \end{cases} \quad \left| \quad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on note $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \frac{x}{x+1} \end{matrix} \quad \text{et} \quad g : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) + x + 1 \end{matrix} .$$

1. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $\frac{f'(x)}{f(x)}$ en fonction de $g(x)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
2. Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$, et que ce α est dans $]0, 1[$. On ne demande pas de valeur exacte de α .
3. En déduire le tableau de variations de f , sans les limites.
4. Montrer que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur \mathbb{R}_+ .
5. Justifier que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$. En utilisant cette limite, étudier la dérivabilité de \tilde{f} en 0.
6. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
7. La courbe représentative de f possède-t-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.

Indication : on pourra de nouveau faire apparaître la limite de la question 5.

Exercice 3

Soit f telle que $f(x) = \arccos \left(\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} \right)$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f noté \mathcal{D}_f .
- (b) Montrer que f est 2π -périodique.
- (c) Calculer $f(\pi - x)$. En déduire que la courbe \mathcal{C}_f de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.
- (d) Justifier qu'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. (a) Sans calcul de dérivée, justifier que f est strictement monotone sur I . En déduire que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
- (b) Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$.
- (c) En déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in I$.
3. Retrouver le résultat de la question 2.(c) en calculant la dérivée de f sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. Tracer la courbe \mathcal{C}_f sur un intervalle de longueur 4π contenant I .
5. On se propose de retrouver le résultat de la question 2.(c) par une autre méthode.
 - (a) Pour $x \in I$, donner l'expression de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ en fonction de $\tan(x/2)$.
 - (b) Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \arccos \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right) + \cos \left(\frac{x}{2} \right)}{\sqrt{2}} \right)$$

- (c) Conclure.

Exercice 4

1. Prouver que $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{2} \right) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{7} \right)$ (*).
2. Soient p, q, r trois réels positifs vérifiant $p \neq 0$ et $1 + p^2 = qr$.
 - (a) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{p+q} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{p+r} \right) \neq \frac{\pi}{2}$.
 - (b) Calculer alors $\tan \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{p+q} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{p+r} \right) \right)$.
 - (c) En déduire que $\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{p} \right) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{p+q} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{p+r} \right)$.

Cette formule est connue sous le nom de formule de Dodgson, mais aussi sous le nom de formule de Lewis Carroll, le révérend Dodgson (1831-1898) étant davantage passé à la postérité sous le pseudonyme qu'il a utilisé pour écrire Alice au pays des merveilles.

3. En partant de la formule (*) et en utilisant la formule de Dodgson, prouver les deux formules suivantes :

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{3} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{7} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{5} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{7} \right) + 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{8} \right).$$

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose alors $T_0(x) = 2$, $T_1(x) = x$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+2}(x) = xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

On définit ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction T_n définie sur \mathbb{R} tout entier.

1. Déterminer une expression simple des fonctions T_2 et T_3 .

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta)$.
3. On souhaite prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction polynomiale de degré au plus n , à coefficients entiers.

On notera pour cela $\mathcal{P}(n)$: « $\exists a_{0,n}, a_{1,n}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{k,n} x^k$ ».

(a) Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Dans la suite, conformément à la notation ci-dessus, on notera, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_{k,n}$ le coefficient de degré k de T_n .

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $a_{n,n}$, le coefficient de degré n de T_n .

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un angle tel que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$.

Le but de cette question est de prouver le théorème de Niven (publié en 1956 par Ivan Niven, même si un résultat plus fort avait déjà été prouvé dès 1933 par Dick Lehmer) qui affirme que, sous les hypothèses ci-dessus :

$$\cos(\theta) \in \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Notons ℓ, m deux entiers, avec $m \in \mathbb{N}^*$, tels que $\theta = \frac{2\ell}{m}\pi$.

(a) Calculer $T_m(2 \cos(\theta))$.

(b) Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ deux entiers premiers entre eux tels que $2 \cos(\theta) = \frac{p}{q}$.

Montrer que :

$$p^m = 2q^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,m} p^k q^{m-k}$$

(c) En déduire que $2 \cos(\theta)$ est entier.

(d) Conclure, en prouvant que $\cos(\theta) \in \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

En d'autres termes, on a prouvé que les angles qui sont des multiples rationnels de π (comme $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{4\pi}{17}$) et qui ont un cosinus rationnel sont ceux que l'on connaissait déjà, à savoir $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et leurs multiples.