Devoir surveillé du 26/05/2025 - Sujet A

Durée : 4h00.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Notations et objectifs.

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On note, pour tout entier naturel k , e_k l'élément de E défini par : $e_k(x) = x^k$ pour tout $x \in [0, 1]$. Pour tout entier naturel n , on note F_n le sous-espace vectoriel de E dont une base est $\mathcal{B}_n = (e_k)_{k \in [0, n]}$.

Sous réserve d'existence, on note :

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide de la fonction φ , des expressions des fonctions $\sin$ et $\frac{\cos}{\sin}$ comme somme d'une série ou d'un produit infini (on parle de *développements eulériens*).

Pour se faire, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Ce problème s'organise de la manière suivante :

- dans les parties I et II, on étudie l'endomorphisme T_2 induit par $\frac{1}{2}T$ sur F_2 , ainsi que ses itérés ;
- dans la partie III, on étudie le noyau de l'endomorphisme $(T - 2\text{id}_E)$;
- dans la partie IV, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ;
- dans la partie V, on obtient une expression de la fonction $\frac{\cos}{\sin}$ comme somme d'une série. Cette partie utilise des résultats des parties III et IV ;
- dans la partie VI, on obtient une expression de $\sin$ comme produit infini. Cette partie utilise des résultats de la partie IV.

Partie I : Étude de l'opérateur T_2 .

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. On note F_2 le sous-espace vectoriel de E dont une base est $\mathcal{B}_2 = (e_0, e_1, e_2)$ où $e_k : x \in [0, 1] \mapsto x^k$ pour $k = 0, 1, 2$.
 - (a) Montrer que pour tout $f \in F_2$, $T(f) \in F_2$.

On note T_2 l'endomorphisme induit par $\frac{1}{2}T$ sur F_2 , de sorte que :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad T_2(f)(x) = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right].$$

- (b) Écrire la matrice de T_2 dans la base $\mathcal{B}_2$, en indiquant les calculs intermédiaires effectués.
 - (c) L'application T_2 est-elle injective ? surjective ?
3. On note :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} F_2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(1) \end{array}.$$

- (a) Montrer que Φ est forme linéaire.
 - (b) Quelle est la dimension de $\text{Ker}(\Phi)$? Déterminer une base de $\text{Ker}(\Phi)$.
 - (c) L'application Φ est-elle injective ? surjective ?

Partie II : Calcul des puissances successives d'une matrice.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{B}' = (e_0, -2e_1 + e_0, 6e_2 - 6e_1 + e_0)$.

4. (a) Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de F_2 .
 (b) Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}'$.
 (c) Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
5. (a) Écrire la matrice M de T_2 dans la base $\mathcal{B}'$ en indiquant les calculs intermédiaires.
 (b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n .
 (c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \in [0, 1] \mapsto a + bx + cx^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $T_2^n(f)$ en fonction de a, b, c .
On rappelle que l'on note $T_2^0 = id_{F_2}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^$, $T_2^n = T_2 \circ T_2^{n-1}$.*
 (d) En déduire que pour tout polynôme $P \in F_2$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(T_2^n(f)) = \int_0^1 f(t) dt.$$

6. On souhaite retrouver le résultat de la question précédente d'une autre manière.

- (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $f \in F_2$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], T_2^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right).$$

- (b) En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que pour tout $f \in F_2$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(T_2^n(f)) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Partie III : Étude du noyau de $(T - 2id_E)$.

7. (a) Montrer que $\text{Ker}(T - 2id_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.
 Soit f un élément de $\text{Ker}(T - 2id_E)$. On note $m = \min_{x \in [0,1]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [0,1]} f(x)$. On fixe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $m = f(x_0)$ et x_1 dans $[0, 1]$ tel que $M = f(x_1)$.
 (b) Montrer que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$.
 (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$.
 (d) En déduire que $m = f(0)$.
 (e) Faire une étude similaire pour M .
 (f) Montrer alors que f est constante.

Partie IV : Étude de la fonction φ .

Sous réserve d'existence, on note :

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

8. Montrer que, pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente.

Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs. La fonction φ est donc définie sur D .

9. Imparité et périodicité de φ .

- (a) Justifier que φ est impaire.

- (b) Vérifier que pour x dans D : $\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x}$.
- (c) Montrer que pour x dans D : $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$.
La fonction φ est donc périodique de période 1.

10. Continuité de φ .

- (a) Justifier pour x dans l'ensemble $D \cup \{0, 1\}$, l'existence de $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x} \right)$.
- (b) Vérifier que : $\forall x \in D, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} - g(x)$.
- (c) Soit h un nombre réel de $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |g(x + h) - g(x)| \leq C|h|$$

$$\text{où } C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}.$$

- (d) En déduire que g est continue sur $[0, 1]$ puis que φ est continue sur $]0, 1[$.
La fonction φ est donc continue sur D .

11. Étude de φ en 0 et en 1.

- (a) Montrer que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$.
- (b) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

Partie V : Développement eulérien de la fonction cotangente.

12. Étude de la fonction cot.

Pour tout x dans l'ensemble D , on note $\cot(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

- (a) Vérifier que $\cot$ est définie et continue sur D , qu'elle est impaire et périodique de période 1.
- (b) Montrer que $\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et que $\cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}x$.
- (c) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.
- (d) Démontrer que, pour tout nombre réel x dans D , on a : $\frac{x}{2} \in D, \frac{x+1}{2} \in D$ et

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)$$

13. Calcul de φ .

- (a) Vérifier que, pour tout nombre réel x dans D , $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$.
- (b) Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$.
- (c) Démontrer alors que $\varphi = \cot$.

Autrement dit : $\forall x \in D, \quad \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$.

14. Première application.

- (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x\cot(x)}{2x^2}$.

Pour tout nombre réel x dans $]0, 1[$, on pose $\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

- (b) Vérifier que $\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1 - x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}$.
- (c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
- (d) Déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie VI : Développement eulérien de la fonction sinus.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1[$, on pose $\alpha_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ et $\beta_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)$.

15. Montrer que, pour tout nombre réel x dans $]0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \alpha_n(x)$ converge. On note alors $\beta(x) =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x).$$

16. **Explicitation de β .** On fixe un nombre réel x dans $]0, 1[$.

(a) Pour N entier naturel non nul, calculer $\int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2}\right) dt$ en fonction de $\beta_N(x)$.

(b) Justifier l'existence de $\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$.

(c) Montrer que $\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2}\right) dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

(d) En déduire que : $\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$.

(e) Montrer alors que, pour tout nombre réel x dans $]0, 1[$, $\beta(x) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.

17. Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel non nul n , on pose $P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.

(a) Montrer que, pour tout nombre réel x de $[0, 1[$, la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente.

Dans la suite, on pose $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$ et on note : $P(x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

(b) Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0, 1[$, $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$.

(c) Montrer que la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est en fait convergente pour tout nombre réel x . On note encore $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$.

(d) Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel dans $] -n, n[$, montrer que :

$$P_n(x+1) = -\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x).$$

(e) En déduire que, pour tout nombre réel x : $P(x+1) = -P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

(f) Montrer alors que, pour tout nombre réel x , $P(x) = \sin(\pi x)$.

Finalement, on obtient ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.