DS7

Correction du devoir surveillé - Sujet B

Problème 1

Partie I. Étude de deux applications

1. (a) Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P)$ est un polynôme en tant que somme et composée de polynômes, et :
$$\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \leq \max\left(\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right), \deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)\right)$$
$$\leq \max\left(\deg(P)\times\deg\left(\frac{X}{2}\right), \deg(P)\times\deg\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \leq 2.$$
Donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Elle est de plus linéaire car pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= \frac{1}{2}\left[(\lambda P+Q)\left(\frac{X}{2}\right)+(\lambda P+Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\lambda}{2}P\left(\frac{X}{2}\right)+\frac{\lambda}{2}P\left(\frac{X+1}{2}\right)+\frac{1}{2}Q\left(\frac{X}{2}\right)+\frac{1}{2}Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \\ &= \lambda f(P)+f(Q) \end{aligned}$$
Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$

(b) Calculons $f(1)=1$, $f(X)=\frac{X}{4}+\frac{X+1}{4}=\dfrac{X}{2}+\frac{1}{4}$ et :
$$f(X^2)=\frac{X^2}{8}+\frac{X^2+2X+1}{8}.$$
Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est :
$$\boxed{M_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1/4 & 1/8\\ 0 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix}.}$$

(c) La matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible car triangulaire supérieure avec des coefficients tous non nuls sur la diagonale. Donc $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_2[X], \text{ en particulier injective et surjective.}}$

2. (a) L'application φ est à valeur dans $\mathbb{R}$, et satisfait pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\varphi(\lambda P+Q)=(\lambda P+Q)(1)=\lambda P(1)+Q(1)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$
Donc $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire.}}$

(b) φ est une forme linéaire non nulle, puisque par exemple $\varphi(1)=1$. Son noyau $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est donc un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$, de dimension $\boxed{\dim(\mathbb{R}_2[X])-1=3-1=2.}$

Déterminons une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Soit pour cela $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :
$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad &\Leftrightarrow \quad P(1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (X-1) \mid P \quad \Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P=(X-1)Q \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{\deg(P)\leq 2} \quad \exists a, b \in \mathbb{R},\ P=(X-1)(aX+b) \end{aligned}$$
Ainsi :
$$\mathrm{Ker}(\varphi)=\{aX(X-1)+b(X-1),\ a, b \in \mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(X(X-1),(X-1)).$$
La famille $(X(X-1), X-1)$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, de cardinal $2=\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$. C'est donc une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Ker}(\varphi).}$

(c) L'application $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$ car $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.
Par le théorème du rang $\mathrm{rg}(\varphi) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. Puisque $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et $\boxed{\varphi \text{ est surjective.}}$

Partie II. Calcul des puissances successives d'une matrice

3. (a) La famille de polynômes $\mathscr{B}'$ étant échelonnée en degrés, elle est libre, de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

   (b) Par définition, $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.}$

   (c) La matrice $\boxed{Q \text{ est inversible}}$ en tant que matrice de passage entre deux bases. On calcule son inverse par méthode du pivot de Gauss. On obtient :

$$\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2/6 \\ 0 & -1/2 & -3/6 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.}$$

4. (a) Calculons $f(1) = 1$, $f(-2X+1) = -2f(X) + f(1) = \dfrac{1}{2}(-2X+1)$ et :

$$f(6X^2 - 6X + 1) = 6f(X^2) - 6f(X) + f(1) = \frac{1}{4}(6X^2 - 6X + 1).$$

   Ainsi :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.}$$

   (b) Par les formules de changement de bases :

$$M = Q^{-1}AQ, \quad \text{qui se récrit} \quad A = QMQ^{-1}.$$

   On montre (éventuellement par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = QM^nQ^{-1}.$$

   Puisque M est diagonale :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix}.$$

   Reste à présent à faire le produit matriciel $A^n = QM^nQ^{-1}$ dont on connait tous les termes. On obtient après calculs :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.}$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, Grâce à l'expression de A^n :

$$f^n(P) = af(1) + bf(X) + cf(X^2) = a + b\left[(\frac{X}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] + c\left[\frac{X^2}{2^n} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right].$$

(d) Avec les calculs précédents :

$$\varphi(f^n(P)) = a + b\left[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] + c\left[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right]$$
$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \int_0^1 (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t \boxed{= \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Partie III. Une autre preuve du résultat précédent

5. (a) Procédons par récurrence comme suggéré.

I Pour $n = 0$, c'est immédiat en notant que $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$. Pour $n = 1$, cela résulte de la définition de f.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n. Au rang $n + 1$, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\begin{aligned}
f^{n+1}(P) &= f^n \circ f(P) \\
&= f^n\left(\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}f^n\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right) + f^n\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \qquad \text{par linéarité de } f^n \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{\frac{X+k}{2^n}+1}{2}\right) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) \qquad \text{par glissement d'indice} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\boxed{f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).}$$

(b) Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

On reconnait ici une expression qui s'apparente à une somme de Riemann. Puisque $P : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue** (car polynomiale), la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)$ existe, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

car toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. On retrouve donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Problème 2

Partie I : Calcul de la somme d'une série convergente.

1. C'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Elle est donc bien définie. On effectue trois intégrations par parties successivement :

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & \boxed{\dfrac{t^2}{2\pi}-t} & & \cos(nt) \\
 & & \searrow & \\
- & \dfrac{t}{\pi}-1 & & \dfrac{\sin(nt)}{n} \\
 & & \searrow & \\
+ & \dfrac{1}{\pi} & & -\dfrac{\cos(nt)}{n^2} \\
 & & \searrow & \\
- & 0 & \xleftarrow{\int} & \boxed{-\dfrac{\sin(nt)}{n^3}}
\end{array} \qquad \boxed{\text{Fonctions } \mathscr{C}^3}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin(nt)}{n} + \left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\cos(nt)}{n^2} - \frac{\sin(nt)}{\pi n^3}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 0\times\frac{\sin(nt)}{n^3}dt \\
&= \left(\frac{\pi}{\pi}-1\right)\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \left(\frac{0}{\pi}-1\right)\frac{\cos(n0)}{n^2}\ \boxed{=\frac{1}{n^2}}
\end{aligned}$$

car $\sin(k\pi)=0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

2. Soit $m\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\,]0,\pi]$. On obtient en factorisant par l'angle moitié en haut et en bas de la fraction :

$$\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}e^{it} = \frac{e^{imt/2}(e^{-imt/2}-e^{imt/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})}e^{it} = \frac{-2i\sin(mt/2)}{-2i\sin(t/2)}\frac{e^{it}e^{imt/2}}{e^{it/2}} = \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}e^{\frac{i(m+1)t}{2}}$$

D'autre part :

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^m e^{int}\right)$$

Or $e^{it}\neq 1$ car $t\in\,]0,\pi]$. Donc :

$$\sum_{n=1}^m e^{int} = e^{it}\frac{1-(e^{it})^m}{1-e^{it}} = \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}e^{\frac{i(m+1)t}{2}} = \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\left(\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)+i\sin\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)\right).$$

On peut donc conclure en prenant la partie réelle que pour tout $m\in\mathbb{N}^\times$ et tout t de $]0,\pi]$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.}$$

3. C'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, donc l'intégrale est bien définie.

   On effectue une intégration par partie (en supposant $\lambda > 0$) :

$$\begin{array}{c|ccc} + & \boxed{u(t)} & & \sin(\lambda t) \\ & & \searrow & \\ - & u'(t) & \xleftarrow{\int} & \boxed{-\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda}} \end{array} \qquad \boxed{\text{Fonctions } \mathscr{C}^1}$$

   On obtient :

$$\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \left[-u(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^\pi + \int_0^\pi u'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\,\mathrm{d}t.$$

   En prenant la valeur absolue :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|-u(\pi)\frac{\cos(\lambda\pi)}{\lambda} - u(0)\frac{1}{\lambda} + \int_0^\pi u'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{|u(\pi)|}{\lambda} + \frac{|u(0)|}{\lambda} + \left|\int_0^\pi u'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\,\mathrm{d}t\right| \quad \text{par inég. triang.} \\ &\leq \frac{|u(\pi)|}{\lambda} + \frac{|u(0)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |u'(t)\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{par inég. de la moyenne} \\ &\leq \frac{|u(\pi)|}{\lambda} + \frac{|u(0)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |u'(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Lorsque $\lambda \to 0$, le membre de droite de l'inégalité tend vers 0. Par théorème d'encadrement, la limite $\boxed{\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } 0}$.

4. (a) La fonction f est continue sur $]0,\pi]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}} \underset{0}{\sim} \frac{-t}{2\times\frac{t}{2}} = -1.$$

   Donc $\lim_{t\to 0} f(t) = -1 = f(0)$, et $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,\pi]}$.

   (b) Le taux d'accroissement de f en 0 vaut :

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t + 2\sin(t/2)}{2t\sin(t/2)}.$$

   Effectuons un développement limité au numérateur en 0 :

$$\frac{t^2}{2\pi} - t + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{2\pi} - t + 2\left(\frac{t}{2} + o(t^2)\right) = \frac{t^2}{2\pi} + o(t^2) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2\pi}$$

   Ainsi :

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2\pi}}{2t\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\pi}.$$

   Donc $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$ existe et vaut $\frac{1}{2\pi}$. La fonction $\boxed{f \text{ est donc dérivable en } 0}$ et $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2\pi}}$.

   (c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $t > 0$:

$$f'(t) = \frac{(t/\pi - 1)2\sin(t/2) - (t^2/2\pi - t)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)}.$$

Cherchons un équivalent du numérateur en 0 :

$$\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin(t/2)=\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\left(t/2+o(t^2)\right)=-t+\frac{t^2}{\pi}+o(t^2)$$

et

$$(t^2/2\pi-t)\cos(t/2)=(t^2/2\pi-t)(1+o(t))=-t+\frac{t^2}{2\pi}+o(t^2).$$

D'où :

$$(t/\pi-1)2\sin(t/2)-(t^2/2\pi-t)\cos(t/2)=-t+\frac{t^2}{\pi}-\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right)+o(t^2)=\frac{t^2}{2\pi}+o(t^2).$$

Ainsi :

$$\frac{(t/\pi-1)2\sin(t/2)-(t^2/2\pi-t)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)}\underset{t\to0}{\sim}\frac{\frac{t^2}{2\pi}}{4(t/2)^2}=\frac{1}{2\pi}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to0^+}f'(t)=\dfrac{1}{2\pi}=f'(0)$. Donc $\boxed{f\text{ est bien de classe }\mathscr{C}^1\text{ sur }[0,\pi]}$.

Remarque. On aurait pu faire les questions (b) et (c) en même temps en montrant que :

- f est continue sur $[0,\pi]$;
- f est dérivable sur $]0,\pi]$ et $\lim\limits_{t\to0^+}f'(t)$ existe et est finie égale à $\dfrac{1}{2\pi}$.

Par théorème de passage à la limite sur la dérivée, f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et $f'(0)=\dfrac{1}{2\pi}$.

Cela nous aurait évité de calculer la limite du taux d'accroissement de f en 0.

5. (a) Pour tous $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\ \text{ et }\ \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a).$$

D'où en sommant :

$$\boxed{\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b).}$$

(b) Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}&=\sum_{n=1}^{m}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\qquad\text{d'après 1.}\\
&=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\sum_{n=1}^{m}\cos(nt)\right)\mathrm{d}t\qquad\text{par lin. de l'int.}\\
&=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t\qquad\text{par 2.}\\
&=\int_0^{\pi}\left(\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin(t/2)}\right)2\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}f(t)\left(\sin\left(\frac{mt}{2}+\frac{(m+1)t}{2}\right)+\sin\left(\frac{mt}{2}-\frac{(m+1)t}{2}\right)\right)\mathrm{d}t\qquad\text{par 5.(a)}\\
&=\int_0^{\pi}f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\left(\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin(t/2)}\right)\sin\left(-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{4\pi}-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{4\pi}-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{t^3}{12\pi}-\frac{t^2}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{12\pi}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{1-3}{12}\pi=-\frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}f(t)\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t.}$$

(c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$. D'après la question 3 :

$$\int_0^{\pi}f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,\mathrm{d}t\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Ainsi la série $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\text{ converge}}$ (on le savait déjà, c'est une série de Riemann d'exposant $2>1$), et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente.

6. (a) Soit $(x,y)\in([0,+\infty[)^2$ fixé.

Pour la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$, remarquons que :

- $\frac{1}{(n+x)(n+y)}\sim\frac{1}{n^2}$;
- $\frac{1}{n^2}\geq 0$ pour tout $n\geq 1$;
- $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car d'exposant $2>1$).

Par théorème de comparaison, $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}\text{ converge}}$.

Pour la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$:

- $\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}\sim\frac{1}{n^3}$;
- $\frac{1}{n^3}\geq 0$ pour tout $n\geq 1$;
- $\sum\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente (car d'exposant $3>1$).

Par théorème de comparaison, $\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}\text{ converge}}$ aussi.

(b) Pour tout x de $[0,+\infty[$:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}=\frac{x}{n(n+x)}$$

qui est le terme général d'une série convergente (question précédente avec $y=0$). Donc la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\text{ converge}}$.

7. Calculons $S(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}0\boxed{=0}$ et

$$S(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{1}-\frac{1}{m+1}\boxed{=1.}$$

8. (a) Pour tout $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$:

$$S(y) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{y+1}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n+y)-(n+x)}{(n+x)(n+y)}\right)$$
$$\boxed{= (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}}$$

(b) D'où en prenant la valeur absolue :

$$|S(y) - S(x)| = \left|(y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}\right| = |y-x| \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}}_{\geq 0}$$

Et puisque $\dfrac{1}{(n+x)(n+y)} \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$ (car $x, y \geq 0$) et que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge comme somme de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, on obtient l'inégalité :

$$\boxed{|S(y) - S(x)| \leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = |y-x| \frac{\pi^2}{6}.}$$

(c) Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé. Pour tout $y \in [0, +\infty[$:

$$\lim_{y \to x} |y-x| \frac{\pi^2}{6} = 0.$$

Par théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{y \to x} S(y)$ existe et vaut $S(x)$. En d'autres termes, la fonction S est continue en x. Et comme ceci vaut pour tout $x \geq 0$, $\boxed{S \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$

9. (a) Soit (x, y) dans $([0, +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$. Alors :

$$\frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n+x)-(n+y)}{(n+x)^2(n+y)}\right)$$
$$= (x-y) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}\right)$$

D'où :

$$\left|\frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\right| = |x-y| \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}\right)}_{\geq 0}$$

Et comme $\dfrac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq \dfrac{1}{n^3}$ pour tout $n \geq 1$ (puisque $x, y \geq 0$), et que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge en tant que somme de Riemann d'exposant $3 > 1$, il suit :

$$\boxed{\left|\frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\right| \leq |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.}$$

(b) Soit $x \geq 0$ fixé. Pour tout $y \geq 0$:

$$\lim_{y \to x} |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{S(y)-S(x)}{y-x}$ existe et vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$. Ainsi la fonction $\boxed{S \text{ est dérivable en tout } x \geq 0}$, donc sur $[0,+\infty[$, et :

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.}$$

(c) Calculons $S'(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \boxed{= \dfrac{\pi^2}{6}}$ et

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{(m)^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m)^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 \boxed{= \frac{\pi^2-6}{6}.}$$

10. Rappelons qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I est concave si, et seulement si, f' est décroissante.

Ici on a obtenu que pour tout $x \geq 0$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

Si $x, y \geq 0$ sont tels que $x \leq y$, alors $(x+n)^2 \leq (y+n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $\dfrac{1}{(y+n)^2} \leq \dfrac{1}{(x+n)^2}$. D'où en sommant (les séries en jeu convergent d'après la question 1.(a)) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(y+n)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \quad \text{soit encore} \quad S'(y) \leq S'(x).$$

Donc S' est décroissante, et $\boxed{S \text{ est concave.}}$

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction φ est définie et continue sur $[1,+\infty[$, de sorte que l'intégrale en jeu est bien définie en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment. De plus, pour tout $t \geq 1$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}$$

et φ est donc clairement décroissante sur $[1,+\infty[$. Par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\varphi(n+1) = \int_n^{n+1} \varphi(n+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \varphi(n)\,\mathrm{d}t \leq \varphi(n).}$$

Soit $N \geq 2$. Sommons les inégalités précédentes pour $n = 1, \ldots, N-1$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \varphi(n) \leq \int_1^N \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N-1} \varphi(n).$$

Calculons :

$$\int_1^N \varphi(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^N = \ln\left(\frac{N}{N+x}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ln\left(\frac{N}{N+x}\right) + \ln(1+x).$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \varphi(n) - \varphi(1) \leq \ln\left(\frac{N}{N+x}\right) + \ln(1+x) \leq \sum_{n=1}^{N-1} \varphi(n).}$$

(b) Passons à la limite lorsque $N \to +\infty$ dans l'inégalité précédente (en notant bien que tout converge comme nous l'avons montré à la question 6.(b)) :

$$S(x) - \varphi(1) \leq \ln(1+x) \leq S(x)$$

qui se récrit, en notant que $\varphi(1) = \dfrac{x}{x+1}$:

$$\boxed{\ln(1+x) \leq S(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}.}$$

(c) En divisant les inégalités précédentes par $\ln(1+x) > 0$:

$$1 \leq \frac{S(x)}{\ln(1+x)} \leq 1 + \frac{x}{(x+1)\ln(1+x)}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{(x+1)\ln(1+x)} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{\ln(1+x)}$ existe et vaut 1 par théorème des gendarmes, ce qui se récrit $\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x+1)}$.

Enfin, puisque $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x)+\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \to 1$ lorsque $x \to 0$, on obtient $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$, et donc $\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).}$

12. (a) Puisque $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} > 0$, S est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.
Dressons le tableau de variation de S.

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$+$	$\frac{\pi^2}{6} - 1$	$+$	
S	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Reste enfin à tracer l'allure de la courbe représentative de S en faisant bien figurer toutes les informations contenues dans le tableau de variation précédent (tangentes en 0 et 1 notamment, concavité).

Exercice supplémentaire

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$: il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Calculons :

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$$

par hypothèse. Donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$, et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

De cette inclusion, on tire l'inégalité $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$. D'autre part, f étant non nulle, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$, et par le théorème du rang :

$$3 = \dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Par conséquent, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 = \mathrm{rg}(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

2. On procède par Analyse-Synthèse.

   - **Analyse.** Supposons qu'il existe une telle base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que
     $$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
     Alors $f(e_1) = 0_E = f(e_2)$ et $f(e_3) = e_1$. Ainsi e_1 appartient à $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$, e_2 est dans $\mathrm{Ker}(f)$ et e_3 est un antécédent de e_1 par f.
   - **Synthèse.** Tentons de construire une telle famille. Puisque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$, prenons e_1 un vecteur non nul dans $\mathrm{Im}(f)$. Puisque $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, (e_1) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(f)$ qu'on peut compléter en une base (e_1, e_2) (en notant que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$). Enfin, puisque e_1 appartient à $\mathrm{Im}(f)$, il existe e_3 tel que $f(e_3) = e_1$.

     Regardons si la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ ainsi construite répond au problème posé :
     - Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre. Soient pour cela $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que :
       $$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0_E.$$
       En appliquant par f (qui est linéaire), on obtient :
       $$\alpha_3 e_1 = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_3 f(e_3) = f(0_E) = 0_E.$$
       Puisque $e_1 \neq 0_E$ par définition, $\alpha_3 = 0$. Ainsi :
       $$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0_E.$$
       Et comme (e_1, e_2) est libre par définition, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. La famille $\mathscr{B}$ est donc libre, de cardinal $3 = \dim(E)$. C'est donc une base de E.
     - Par définition, $f(e_1) = f(e_2) = 0_E$ et $f(e_3) = e_1$. Ainsi :
       $$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

     D'où $\boxed{\text{l'existence d'une telle base } \mathscr{B} \text{ dans laquelle la matrice de } f \text{ à la forme souhaitée.}}$
